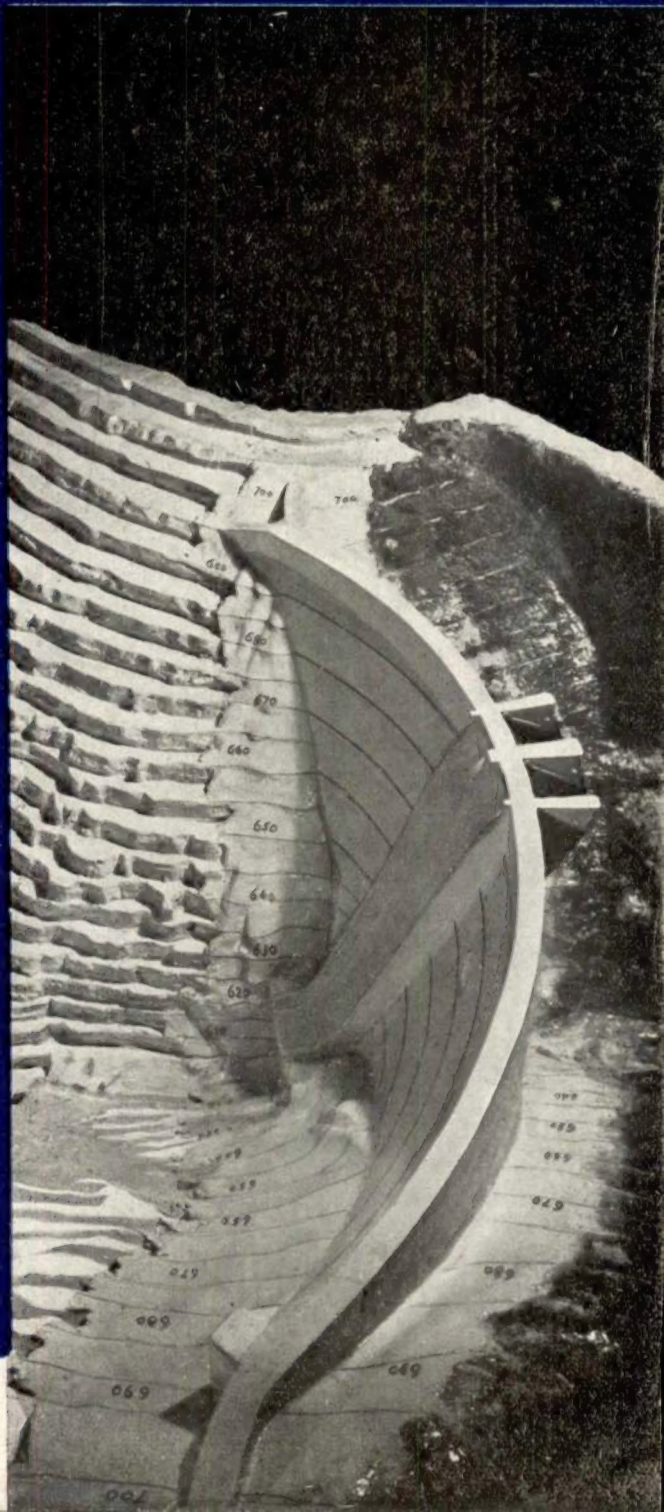
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 156-MAIO-1945

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.º
LISBOA

União Eléctrica Portuguesa

S. A. R. L.

SEDE
Rua Duque de Loulé, 240 — Pôrto
Telef. 2828—2829—2830 — Est. 90

DELEGAÇÃO
R. António Maria Cardoso, 13, 2.º-Lisboa
Telefones 27232 — 27233 — Est. 365

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA GACHOFARRA

A **União Eléctrica Portuguesa** distribui e vende electricidade nos **distritos** de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU LEIRIA e de SETÚBAL, pela mais extensa rêde de alta-tensão em Portugal (mais de 1.200 kms), levando fôrça motriz às FÁBRICAS e luz a CIDADES, VILAS, ALDEIAS e LUGARES

A **U. E. P.** facilita a electrificação de Fábricas e oferece as maiores vantagens nas suas tarifas

Consultar a **U. E. P.** e consumir a sua energia é **proveitoso negócio**

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia "CIMENTO TEJO"

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
156
Maio—1945

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES

ADMINISTRADOR
ANTÓNIO BUSTORFF

BIBLIOTECÁRIO
FERNANDO MANZANARES ABECASIS

CORPO REDACTORIAL
J. M. Correia Vitorino
Duarte Bello
Fernando Blanqui Teixeira
Manuel Franco Falcão
João Barata Galvão
José Maria Seguro

NÚMERO AVULSO 6$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	16$00	30$00	58$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	40$00	70$00
Estrangeiro...	—	45$00	80$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Maquette da barragem de Venda Nova no rio Rabagão: tipo abóbada espessa, de 95 metros de altura, com evacuação das cheias em salto de ski sôbre a descarga de fundo.

(Projecto da Direcção Geral dos Serviços Hidráulicos).

		Págs.
O Problema hidroeléctrico nacional		391
A Projecção axonométrica no desenho técnico	Eng.º Cássio Ayres da Silva	399
A prospecção eléctrica do sub-solo pelo método da resistividade aparente	Eng.º Vasco Mendes de Sousa	426
Ficheiro	José Maria Seguro	437
Vida escolar e associativa		448
Pontos de exame de aptidão		455
Notas bibliográficas		461
Bibliografia		461
Publicações recebidas		462

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

D. MOURA — ENGENHEIRO

REPARADORA ELECTRO-MECÂNICA

Uma organização para trabalhos de electricidade

ALTA TENSÃO — BAIXA TENSÃO

Oficinas de construções eléctricas.
Transformações de características e reparações em:
GERADORES — MOTORES — TRANSFORMADORES
e em tôda a aparelhagem eléctrica para usos industriais e agrícolas.
SERVIÇO DE ASSISTÊNCIA URGENTE À INDÚSTRIA

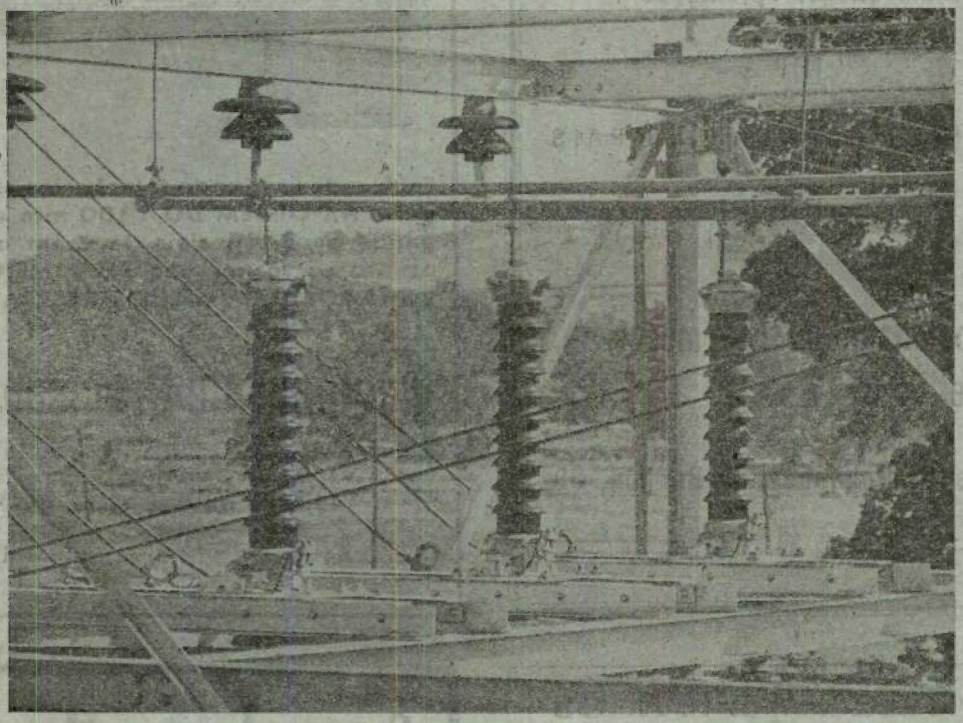
Instalações industriais de Fôrça Motriz e Luz
Postos de transformação

Com o nosso empréstimo de máquinas temos evitado a paralização de muitas fábricas

RUA DA TRINDADE, 18-A — LISBOA
Telefone 21406
Telegramas — REPARADORA

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Aparelhos de protecção «THYRITE» contra sobretensões

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

MÁRMORES

aos melhores preços
Em tôdas as aplicações

IIII

A MAIOR PRODUÇÃO DO PAÍS

IIII

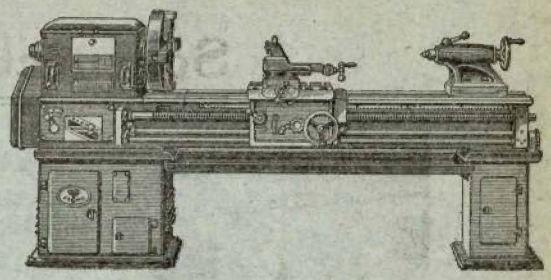
Pedidos à

Sociedade de Mármores de Portugal, L.da

Rua de S. Domingos de Benfica, 63

LISBOA

TORNOS DE QUALIDADE



Fabricados segundo tolerâncias «Schlesinger», NA ORDEM DO 1/100 mm e empregando aços especiais, também de Cr-Ni, os nossos tornos são PELO MENOS TÃO BONS COMO OS MELHORES ESTRANGEIROS

Máquinas de Precisão, Ltd.a

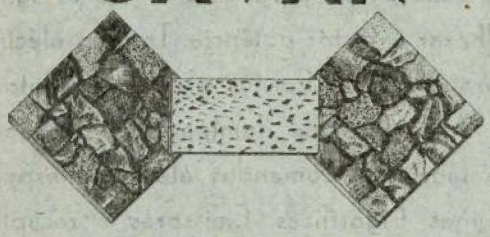
(Director: Eng. J. d'Arriaga de Tavares)

45, Rua da Boa Vista, 49-1.º

TELEF. 6 1581 LISBOA

São garantidos por **10 ANOS** contra o desgaste

MOSAICOS **CAVAN** AZULEJOS



de granulados de mármore

OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS ECONÓMICOS

Soc. Portuguesa CAVAN

Rua D. Estefânia, 42

Telefone 47812 | 50129 — Lisboa

FILIAL NO PÔRTO: **RAL, LTD.A**
PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

SOCIEDADE INDUSTRIAL METALURGICA

Responsabilidade Limitada
(REGISTADO)

SERRALHARIAS, CALDEIRARIA, FERRARIA, FUNDIÇÕES

ESCRITÓRIO

Rua de S. Tiago, 13

LISBOA

Telefone 26572

JAYME DA COSTA, L.DA

LISBOA • PÔRTO

Representantes exclusivos em Portugal, Ilhas e Colónias de:

ASEA — Allmana Svenska Elektrisca Aktiebolaget — Vasteras, Suécia.
Máquinas eléctricas, transformadores, fornos, aparelhagem, etc.

Aktiebolaget **ATLAS DIESEL** — Estocolmo — Suécia.
Motores marítimos, motores estacionários, grupos compressores de ar e ferramentas pneumáticas.

STAL — Svenska Turbinfabriks Aktiebolaget Ljungström, Finspong — Suécia.
Turbinas a vapor e turbo-alternadores.

Aktiebolaget **KARLSTADS** Mekaniska Werkstad — Karlstad — Suécia.
Turbinas Hidráulicas e máquinas para o fabrico de papel.

Aktiebolaget **LILJEHOLMENS** Kabelfabrik — Estocolmo — Suécia.
Cabos eléctricos.

SANDVIKENS Jernverks Aktiebolag — Sandviken — Suécia.
Aços finos.

Aktiebolaget Svenska **FLAKTFABRIKEN** — Estocolmo — Suécia.
Ventilação.

Aktiebolaget **BALTIC** — Estocolmo — Suécia.
Batedeiras e desnatadeiraa.

Aktiebolaget **PENTAVERKEN** — Gothenburgo — Suécia.
Motores marítimos a gasolina.

LANDIS & GYR, S. A. — Zug — Suíça.
Contadores e outros instrumentos de medida e contrôle eléctrico.

JOHN ROBSON, LTD. — Shipley — Inglaterra.
Motores horizontais Diesel e a gás pobre.

BAMFORDS LTD. — Uttoxeter — Inglaterra.
Motores Diesel verticais para pequenas indústrias e irrigações.

N. R. Diesel Engine C.º — Altrincham — Inglaterra.
Motores marítimos e terrestres.

PALMER BROS. Engines Inc. — Nova York — U. S. A.
Motores marítimos.

PEERLESS Pump Division — Los Angeles — U. S. A.
Bombas centrífugas verticais.

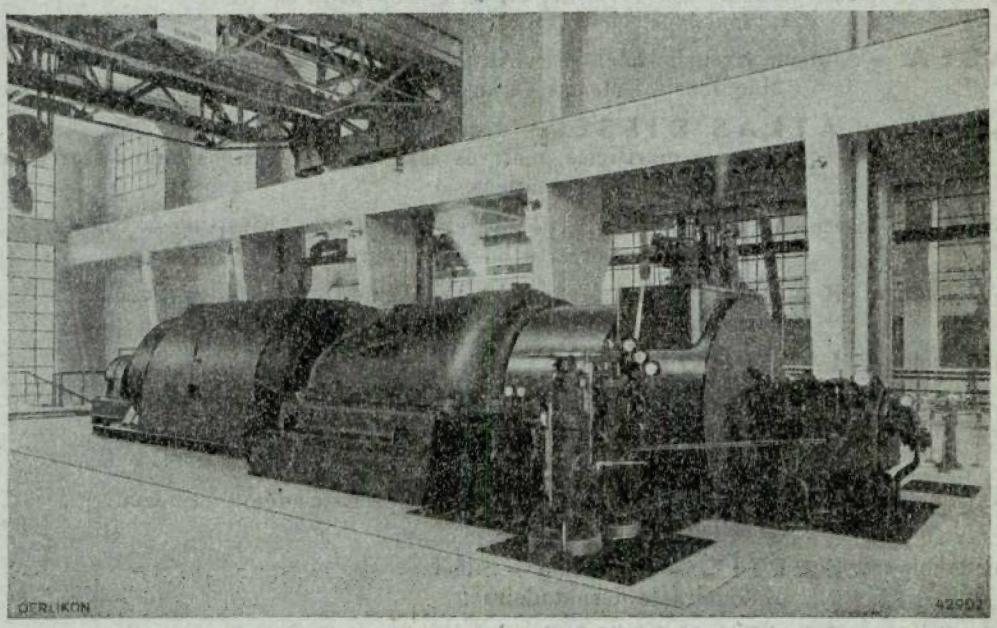
REYNOLDS Tube C.º Ltd. — Birmingham — Inglaterra.
Tubos para bicicletas.

General Motores Overseas Operations — New York — U. S. A.
Grupos electrogéneos **DELCO-LIGHT.**

etc. etc. etc.

MECÂNICA E ELECTRICIDADE
em tôdas as suas aplicações

OERLIKON



Grupo turbo-alternador Oerlikon de 30000 kW e ponte rolante de 74 t. da Central de Hameenlinna (Filândia)

PRODUTOS OERLIKON

Equipamentos eléctricos para centrais termo e hidro-eléctricas, subestações e instalações de distribuïção. Geradores e motores eléctricos de todos os tipos, transformadores, reguladores de indução, grupos convertidores, mutadores, turbinas a vapor e turbo geradores, gruas eléctricas, interruptores e aparelhos de manobra para alta e baixa tensão, aparelhos de protecção e relais de todos os tipos, equipamentos para soldadura eléctrica por arco, compressores e bombas de vácuo, electrolisadores, equipamentos eléctricos para locomotivas, automotoras eléctricas e diesel-eléctricas (via estreita e normal), tramwais, troley-buses, funiculares, teleféricos, etc.

Representante Geral para Portugal e Colónias

P. BELLASI

Pôrto // Rua Sá da Bandeira, 494, 3.° // Telefone 968

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON
ZURICH-OERLIKON (SUIÇA)

45.816

TÉCNICA

FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES

DIRECTOR

ANO XX - N.º 156 MAIO 1945

O PROBLEMA HIDROELÉCTRICO NACIONAL

1. A palestra, ùltimamente pronunciada na Ordem dos Engenheiros pelo Eng.º Carvalho Xerez, *Aproveitamento hidroeléctrico dos nossos rios — Estudos realizados pela Direcção Geral dos Serviços Hidráulicos,* veio pôr em destaque os aspectos de que, fundamentalmente, se reveste o problema dos aproveitamentos hidroeléctricos em Portugal.

A importância que, nos campos técnico, económico e social, terá a resolução dêsse problema justifica, por si só, a iniciativa que tomámos de, obtida a devida autorização, aqui trazermos também a público os seus traços dominantes.

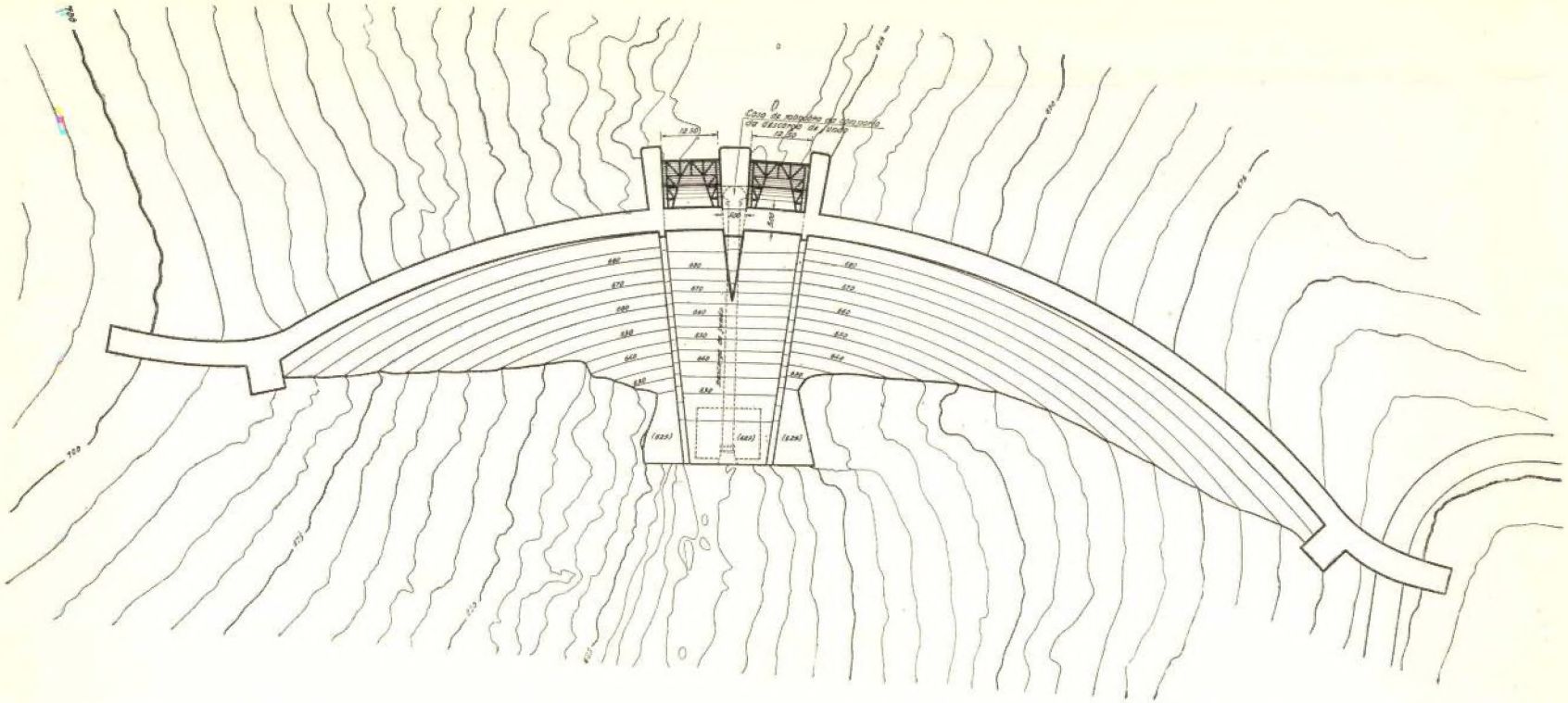
2. Um primeiro aspecto que à «*Técnica*», como órgão, em boa parte, representativo do nível técnico do nosso País, é especialmente grato registar — é o desenvolvimento que, nestes últimos anos, têm tido os estudos necessários à organização do inventário das nossas possibilidades hidroeléctricas, os quais estão confiados à Secção de Estudos de Aproveitamentos Hidráulicos, da Direcção Geral dos Serviços Hidráulicos.

Êsses estudos, quer pela compilação dos elementos hidrométricos, topográficos e geológicos no campo, quer pela utilização dêsses elementos, no gabinete, para a determinação das características hidrológicas, energéticas e construtivas dos futuros sistemas produtores, dão às conclusões formuladas na referida palestra aquela garantia de consistência que nenhuma intuïção ou fantasia, por mais sublimemente inspirada que se creia, pode suprir.

3. Das características do clima provém, para o regimen dos nossos rios, um grau de irregularidade tal que se torna indispensável a criação, sempre que econòmicamente possível, de grandes albufeiras de regularização. Sem elas não é possível a manutenção da energia permanente no mínimo capaz de assegurar o funcionamento das indústrias com continuïdade.

Dessa extrema irregularidade resultam também as deficientes disponibilidades em energia temporária. Com excepção do caso do Douro, nenhum dos outros grandes sistemas produtores estará habilitado a garantir, em ciclo sêco, o fornecimento de energia temporária.

O benefício a colher com a criação de grandes albufeiras não está, de resto, apenas na regularização imediata dos caudais dos rios em que se inserem; êle estender-se-á também, através da interconexão eléctrica, a outros aproveitamentos em que não é pos-



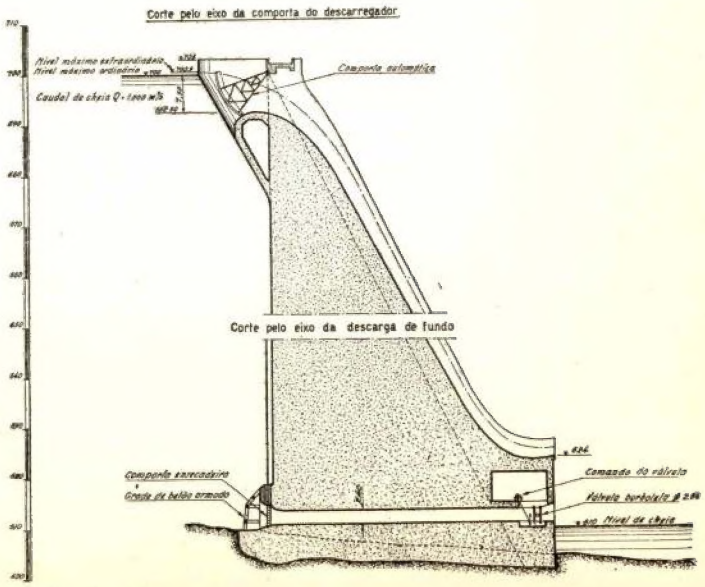


Fig. 1 — Barragem de Venda Nova. Planta e perfil.

(Anteprojecto Serviços Hidráulicos)

Escala 1 : 1.500

sível ou não é económica a construção de grandes barragens. E há que ter ainda presente, em certos casos, que a existência das albufeiras facilitará a resolução de problemas de rega, navegação e defesa contra as cheias.

4. A necessidade das grandes albufeiras arrasta consigo a das grandes barragens. As obras de retenção passam assim a ter um pêso muito importante na economia dos aproveitamentos, donde resulta a necessidade de as estudar com grande cuidado de modo a procurarem-se soluções quanto possível aligeiradas, tipo abóbada espessa, geralmente, mas em termos tais que fiquem ressalvadas surprêsas da constru-ção.

A êste respeito, os locais de implantação apresentam-se com condições geológicas e topográficas bastante favoráveis, que não dispensam, porém, um cuidadosíssimo reconhecimento e um criterioso estudo das formas das barragens.

Com o problema das obras de retenção liga-se o da evacuação das cheias. A segurança, a economia e a possibilidade de se antecipar o início da exploração levam a admitir a evacuação das cheias sôbre as próprias barragens, como em Venda Nova, no Rabagão (fig. 1); até mesmo nos casos de centrais de pé de barragem, como Castelo do Bode (fig. 2), a evacuação das cheias sôbre o conjunto barragem-central deverá ser tida em consideração, aguardando-se, apenas, os ensinamentos definitivos que, em breve, serão fornecidos pela entrada em serviço das obras construídas, segundo êsse protótipo, no estrangeiro.

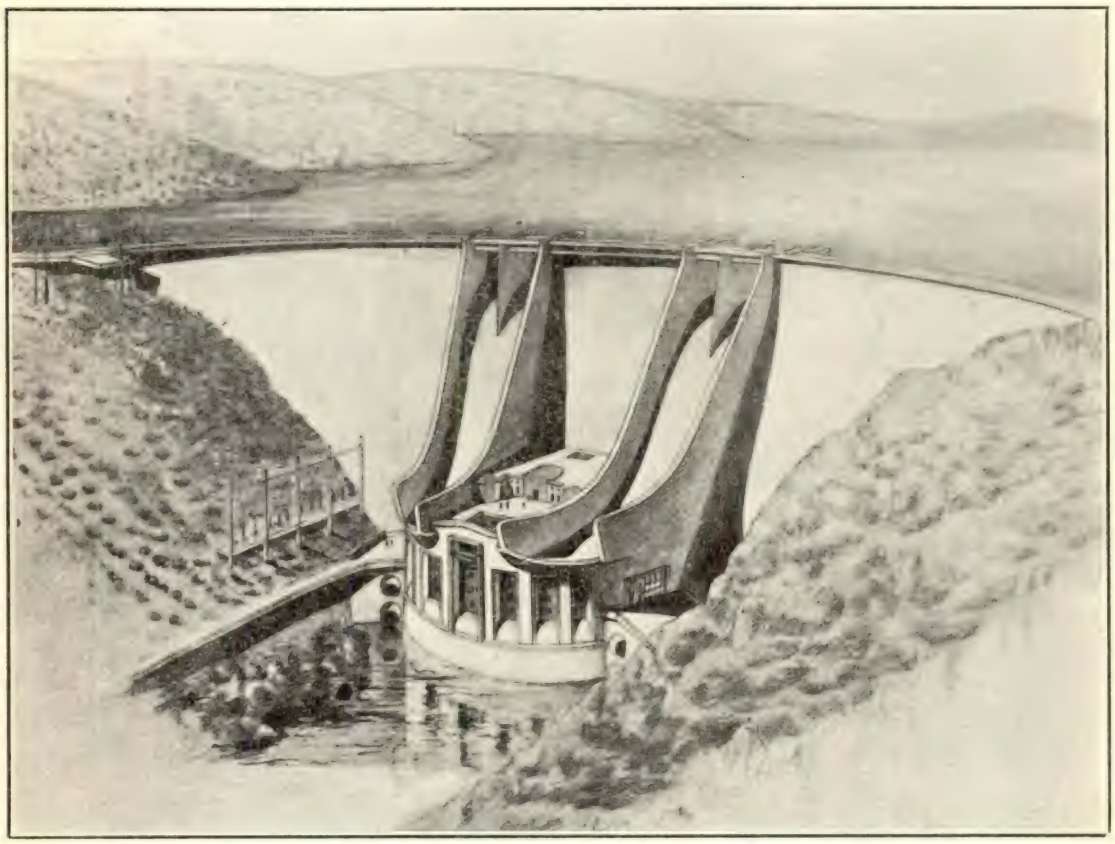


Fig. 2 — Barragem e central de Castelo do Bode. Perspectiva. (Anteprojecto Coyne).

5. Em cada uma das bacias onde se situam os grandes sistemas produtores de energia, últimos (quando existem) fiquem com as suas possibilidades de resolução prejudicadas.

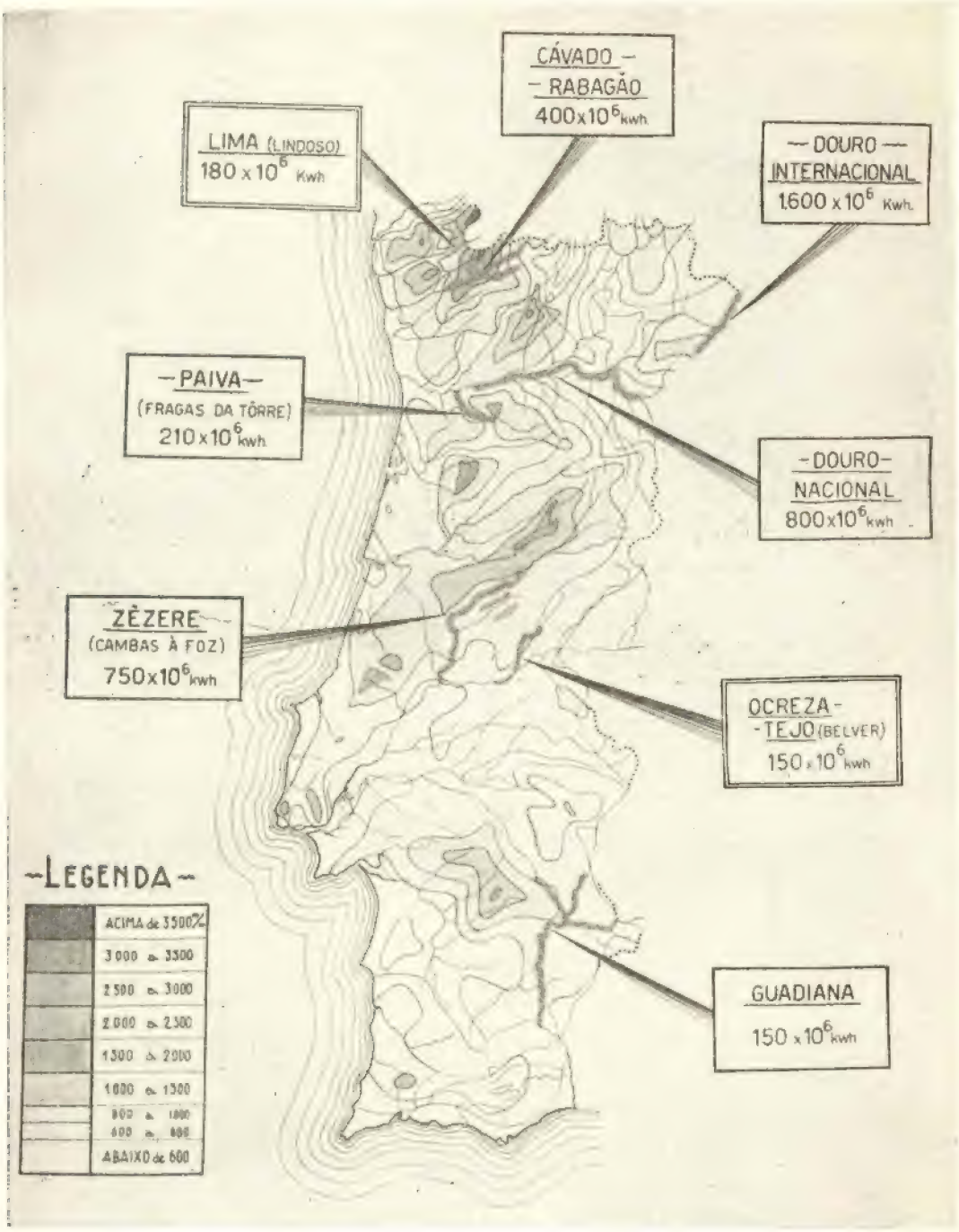


Fig. 3 — Carta udométrica do ano médio de 1933-1943. Sistemas produtores.

é fácil isolar o problema hidroeléctrico dos restantes problemas hidráulicos (regularização fluvial, rega e navegação), sem que estes

Esta circunstância tem a grande vantagem de permitir um mais fácil estabelecimento das condições de prioridade de execução dos

diferentes aproveitamentos, tendo principalmente em conta a energia produtível e o custo das obras.

Sem dúvida, os benefícios que dalguns aproveitamentos advirão para os restantes melhoramentos hidráulicos das respectivas bacias hão-de ser tidos em conta ao discutir-se a oportunidade da sua realização. Mas isso, sem que, na expressão do valor económico dêsses aproveitamentos, haja que entrar em conta com outros elementos além dos correspondentes à função produção de energia.

Outra circunstância, que também felizmente se dá, e que, de certo modo, completa a anterior, é a possibilidade de, dentro de cada bacia, o esquema dos aproveitamentos ser estabelecido de modo a prever-se uma construção escalonada das obras em que os primeiros escalões a realizar apresentem já condições económicas próprias.

6. Na fig. 3 mostra-se a distribuïção geográfica dos principais sistemas produtores, com a indicação da energia anual permanente produtível (ciclo mais sêco) em cada um dêles.

A conveniência de se estabelecer, no abastecimento da rêde eléctrica nacional, um razoável equilíbrio de potências e de custos de transportes da energia implica a selecção dos três sistemas que, bàsicamente, hão-de garantir o suprimento das necessidades das zonas norte, centro e sul do País. São êles, respectivamente, o Cávado-Rabagão, o Zêzere e o Guadiana.

Importa, porém, observar que são diferentes as significações da escôlha de cada um dêstes três sistemas. Assim, no caso do Cávado-Rabagão, ela resume uma questão de prioridade, em que prevalece o pêso das facilidades construtivas, mas que não dispensa que, após a construção do seu primeiro escalão (Venda Nova), sejam ponderadas as vantagens de se atacar o Douro (benefício para a navegação, no trôço nacional, baixo custo da energia, provàvelmente, no internacional, e, em qualquer dêles, valiosas disponibilidades em energia temporária).

Na zona centro do País, a escôlha do Zêzere é indiscutível e a oportunidade da sua realização é imediata.

O caso do Guadiana — êsse tem um significado essencialmente geográfico. As suas condições económicas não devem aconselhar a sua imediata realização; para já e ainda, por certo, durante algum tempo, o abastecimento da zona sul será satisfatòriamente feito pelos sistemas produtores do Zêzere, Tejo e Ocreza.

7. Dos quantitativos de energia permanente indicados na fig. 3, há três que valorizam extraordinàriamente os respectivos sistemas produtores, porque beneficiam da regularização introduzida por outros aproveitamentos na zona espanhola das suas bacias hidrográficas: são os do Lima (Lindoso) e do Douro nacional e internacional.

QUADRO I

Rios	Energia permanente (10^6 kwh)	Custo provável das obras (milhares de contos)	Custo do kwh
Zêzere (Cambas à foz)	750	900	$14,5
Cávado e Rabagão	400	400	$12,0
Guadiana . . .	150	—	—
Paiva (Fragas da Tôrre)	210	235	$13,5
Douro nacional .	800	—	—
Douro internacional	1.600	—	—

8. No quadro I indicam-se, para os grandes aproveitamentos, a energia permanente, e também o custo do kwh, em relação àqueles de que existem já estudos em condições de se poder avaliar o custo das obras. Sem que se indiquem números precisos, pode no entanto afirmar-se, conforme já se referiu, que as condições económicas do aproveitamento do Guadiana não serão tão bôas como as dos restantes. Quanto às do Douro, no seu trôço nacional, o custo do kwh não será, talvez, inferior ao do Cávado-Rabagão; o trôço internacional parece susceptível de produzir energia a baixo prêço.

9. As condições económicas globais dos sistemas de aproveitamentos cujos estudos estão mais adiantados, são apresentadas no quadro III, em que está feita a decomposição do custo do kwh em duas parcelas. A primeira destas é o encargo das barragens, obras acessórias, derivação provisória das águas, expropriações e restabelecimento de comunicações; a segunda é o das tomadas de água, túneis, chaminés de equilíbrio, condutas forçadas, centrais e respectivo equipamento.

QUADRO II

Rios	Barragens				Albufeiras			Encargo das barragens no custo do kwh da reserva estival
	Designação	Altura (m)	Volume de betão (10^3 m^3)	Custo (milhares de contos)	Capacidade útil (10^6 m^3)	Queda média bruta total (m)	Reserva estival (10^6 kwh)	
Zêzere. . . .	Cabril. . . .	125	550	98	500	236	236	$05,0
	C.º do Bode .	110	500	90	875	87	152	$07,1
Rabagão. . .	V.ª Nova . .	95	240	51	90	592	106	$05,8
Cávado . . .	Paradela . .	75	250	54	61	602	73	$08,9
Paiva	Fragas da Tôrre . . .	100	350	70	225	220	99	$08,5
Conjunto		—	1.890	363	1.751	—	666	$06,5

Como as barragens representam um grande, mas necessário, encargo no custo do kwh, interessa analisar alguns aspectos desta importante questão. No quadro II indicam-se as características das barragens (altura, volume de betão e custo) e das albufeiras por elas criadas (capacidade e reserva de energia acumulada em relação à queda total aproveitada a juzante); está lá também calculado o encargo das barragens no custo do kwh da reserva estival.

Os custos apresentados foram calculados com preços actuais de mão de obra, cimento, ferro e equipamentos mecânicos e eléctricos.

Devem, por isso, ser tomados, sobretudo, como índices de comparação.

10. Finalmente, como última faceta desta visão de conjunto, resumem-se no quadro IV as condições técnicas e económicas da potência a instalar nas centrais do Zêzere, Cávado-Rabagão e Paiva (Fragas da Tôrre).

QUADRO III

Rios	Energia permanente (10^6 kwh)	Barragens, obras acessórias, derivação provisória das águas, expropriações e restabelecimento de comunicações		Tomadas de água, túneis, condutas forçadas, chaminés de equilíbrio, centrais e respectivo equipamento		Custo total do kwh
		Custo (milhares de contos)	Custo do kwh	Custo (milhares de contos)	Custo do kwh	
Zêzere.	750	410	$06,6	490	$07,9	$14,5
Cávado-Rabagão.	400	198	$05,9	202	$06,1	$12,0
Paiva (Fragas da Tôrre) .	210	100	$05,7	135	$07,8	$13,5
Conjunto	1.360	708	$06,2	827	$07,3	$13,5

O coeficiente de sobreequipamento tem maior valor no Zêzere, pelo facto de a potência nas turbinas diminuir consideràvelmente quando, no fim da estiagem, as albufeiras atingem o seu nível mínimo.

Além disso, deve, na apreciação do coeficiente de sobreequipamento de qualquer dos três sistemas a que se refere o quadro IV, ter-se em conta que será às respectivas cen-

QUADRO IV

Rios	Energia permanente (10^6 kwh)	Potência (CV)			Custo total das obras		Custo do equipamento mecânico e eléctrico	
		Permanente	Instalada (sob queda média)	Coeficiente de sobreequipamento	(milhares de contos)	por CV instalado	(milhares de contos)	por CV instalado
Zêzere	750	116.000	432.000	3,7	900	2.080$	510	1.180$
Cávado-Rabagão .	400	62.000	193.000	3,1	400	2.070$	164	850$
Paivas (Fragas da Tôrre).	210	33.000	96.000	2,9	235	2.450$	103	1.070$
Conjunto	1.360	211.000	721.000	3,4	1.535	2.130$	777	1.080$

trais que competirá fazer face ao grande abaixamento (ou mesmo anulação) da potência das turbinas nas baixas quedas (Douro e Tejo), no período das cheias, e das altas quedas a fio de água, no período de estiagem.

11. Tais são, em rápida síntese, as condições em que se apresenta o problema nacional da *hulha branca*.

O que dêle aqui quisemos destacar é que, *sem ser fácil, tem solução garantida*.

Tornar esta numa realidade será operar, na fisionomia da Nação, um progresso sem precedentes.

A PROJECÇÃO AXONOMÉTRICA NO DESENHO TÉCNICO

PELO ENG.º MECÂNICO (I. S. T.) CÁSSIO AYRES DA SILVA

Professor-Assistente do Instituto Superior Técnico

Introdução

Na sua evolução ao longo dos anos, o Desenho Técnico é, cada vez mais, a aplicação duma série de regras e menos uma arte. Longe vai o tempo em que as peças ou conjuntos construtivos apresentavam dimensões exageradas e formas inúteis, e se representavam no papel com aguarelas multicolores e letras de vários estilos complicados.

À medida que se tem aperfeiçoado o estudo dos materiais de construção e da sua resistência, que o progresso industrial introduziu novos e múltiplos processos de trabalho, e que a aerodinâmica trouxe o gôsto e as vantagens das linhas simples, o Desenho Técnico vai acompanhando e traduzindo as tendências da época que passa.

É assim que observamos nêle o empirismo das dimensões ir sendo substituído pelo cálculo numérico ou gráfico, o sentimento da forma e das proporções ser destronado pelas regras da geometria, e a preocupação do pormenor ceder o passo ao emprêgo de normas, de convenções, de representações abreviadas ou mèramente simbólicas.

Convém acentuar que não consideramos nêste campo o Desenho Arquitectónico; êste é realmente a expressão técnica e construtiva duma arte que deve dominar a sua apresentação, ao passo que no âmbito restrito daquilo a que, usualmente, chamamos Desenho Técnico, a habilidade e o gôsto artístico entram cada vez em menor grau, confiada a sua tradução gráfica quási que exclusivamente ao desenhador profissional.

O Engenheiro ou futuro Engenheiro, para quem se destinam especialmente estas notas, deverão conhecer, de preferência, o «porquê» de certas regras que aplicam nos seus desenhos, de forma que a observação directa, a imaginação ou os cálculos, sejam correctamente expressos apoiando-se em bases de carácter positivo.

Isto não exclui nem deve confundir-se, evidentemente, com a correcção de traço, a boa apresentação, o equilíbrio de proporções e o bom senso no desenho do Engenheiro, condições indispensáveis para que a «linguagem desenhada» seja clara, completa, concisa. Para conseguir estas qualidades, basta conhecer as normas em uso e praticar na utilização da vista, da mão e dos mais vulgares instrumentos de desenho.

O sentimento construtivo, importantíssimo para o Engenheiro, é talvez o equivalente ao sentimento artístico do Arquitecto; como êste, é inato e aperfeiçoa-se com a prática, mas importa não confundir e não esquecer que para aprender a construir é necessário, primeiro, aprender a desenhar.

Dada a aplicação cada vez maior da axonometria ao Desenho Técnico, vamos dar as noções fundamentais dêste capítulo do desenho geométrico, procurando certos aspectos inéditos de conduzir a exposição que permitam torná-la tão simples e tão completa quanto possível.

Generalidades

Definição :

«A *projecção axonométrica* é a projecção ortogonal dum modêlo a três dimensões sôbre um único plano não paralelo a qualquer dos eixos principais, tri-ortogonais, que se possam imaginar ligados a êsse modêlo».

Com uma única projecção, obtém-se assim uma representação que dá a sensação da forma e do relêvo do modêlo e que, para objectos de dimensões limitadas, se aproxima da impressão visual obtida dum ponto de observação suficientemente distante.

Podemos, portanto, considerá-la como uma perspectiva convencional ou rápida [a] em comparação com a *perspectiva central* ou cónica (projectantes radiando dum ponto), única que, por se aproximar do mecanismo geométrico da visão e da fotografia, reproduz, como estas, o efeito natural da redução da grandeza aparente das dimensões em função da distância ao observador (efeito perspectivo).

Na projecção ortogonal multiplanar, usada correntemente no Desenho Técnico, os planos de projecção são escolhidos, quanto possível, paralelos aos eixos ou planos principais do modêlo, podendo multiplicar-se o seu número e portanto o número de «vistas». Em cada uma destas, porém, só figuram duas das três dimensões do objecto.

Na representação axonométrica, representam-se numa só «vista» as três dimensões características do modêlo (comprimento ou largura, altura, e espessura ou profundidade); é uma projecção uniplanar [b].

Vantagens :

— Em comparação com a perspectiva rigorosa, a sua execução é muito mais fácil e rápida.
— A relação das dimensões das grandezas que, no modêlo, tenham a mesma orientação, mantém-se na representação gráfica, isto é, existem escalas constantes para cada direcção considerada.
— Como conseqüência, a medição de dimensões do objecto no desenho e a cotagem dêste resultam mais claras e fáceis.
— Em comparação com a projecção ortogonal multiplanar, dá a impressão do relêvo com um só golpe de vista, auxiliando a operação de «ver no espaço» o modêlo.

Inconvenientes :

— A deformação do modêlo, em relação à impressão visual, é acentuada quando há uma dimensão predominante (*fig. 1*).
— Em relação à projecção ortogonal corrente, perde-se a simplificação de haver uma única escala para tôda e qualquer dimensão paralela ao plano de projecção em que ela é realizada.
— Há demasiada acumulação de traços quando o modêlo é complexo, pois não podem distribuir-se as linhas que definem a peça, bem como as de cota e de chamada, pelas diferentes «vistas» da projecção multiplanar.

(a) Esta semelhança levou à adopção, nos países latinos, da expressão «perspectiva axonométrica», usando-se também as designações «perspectiva cavaleira», «perspectiva militar» e outras análogas, embora estas representações se afastem ainda mais da perspectiva rigorosa. Podemos admitir a terminologia, muito generalizada, mas os autores ingleses e americanos reservam a palavra «perspectiva» para a projecção cónica.

(b) Os anglo-saxões chamam-lhe, por vezes, *tri-dimensional drawing*, expressão que traduziremos à letra, embora com relutância, por *representação tri-dimensional*.

Em resumo, a projecção axonométrica pode considerar-se um meio termo entre a perspectiva cónica e a projecção ortogonal vulgar, procurando obter os efeitos da primeira por processos aproximados aos da segunda; por isto, é vulgar chamar-se-lhe *perspectiva paralela.*

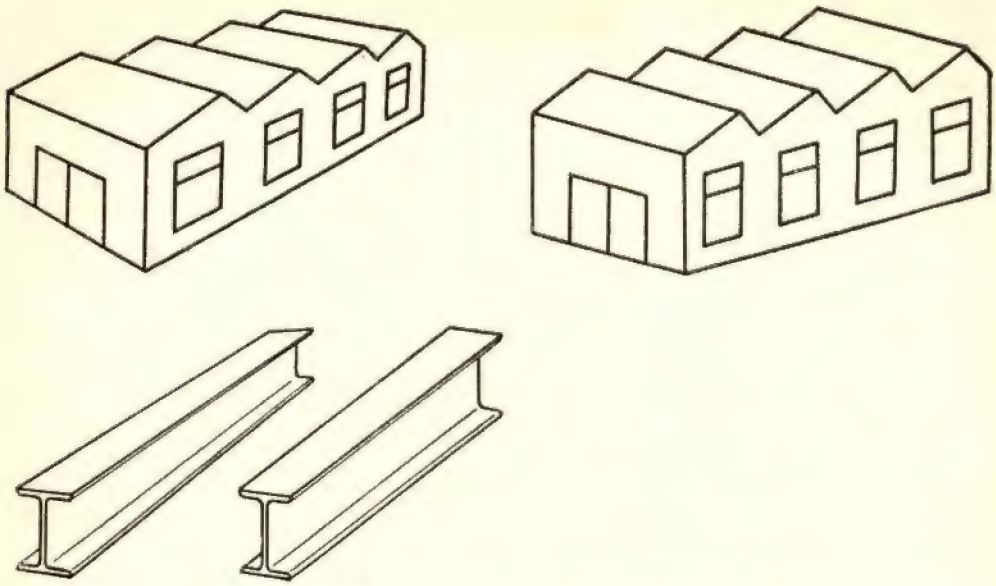


Fig. 1 — Perspectiva central e projecção axonométrica.

Nomenclatura e variedades

Para estabelecer as propriedades geométricas fundamentais da representação axonométrica, recorremos ao processo clássico de utilizar como modêlo um cubo, peça cuja simetria e regularidade a tornam aconselhável para o efeito.

Qualquer grupo de três faces com um ponto comum (vértice do cubo) forma um triedro tri-ortogonal; as três arestas que concorrem num vértice são paralelas aos eixos principais do cubo e definem um sistema espacial de eixos ortogonais.

As grandezas das arestas, tôdas iguais, serão tomadas como dimensão unitária sôbre cada um dos eixos dêsse sistema.

Imaginemos inicialmente o cubo com duas faces paralelas a dois planos ortogonais H e V e dêmos-lhe sucessivamente uma rotação γ em tôrno dum eixo vertical e outra δ em tôrno dum eixo de tôpo; feito o usual rebatimento para que ambos os planos coïncidam com o plano do desenho, teremos duas projecções ortogonais, não correspondentes, do cubo (*fig. 2*).

A projecção ortogonal dêste cubo, assim rodado de quaisquer ângulos em tôrno dos dois eixos considerados, sôbre um plano de perfil P será, por definição, uma projecção axonométrica do cubo.

Rebatamos agora o plano P sôbre a superfície do desenho: obtemos em A a representação axonométrica do modêlo, para o que se acharão os pontos de intersecção das projectantes e das linhas de rebatimento correspondentes a cada um dos oito vértices. Na prática, bastará determinar os quatro pontos que definem as direcções e dimensões aparentes de três arestas concorrentes, e tirar paralelas.

À representação do cubo, assim obtida, chamemos *cubo axonométrico;* todos os ângulos rectos do cubo original ou modêlo se apresentam deformados. Por outras palavras: às

três arestas que constituem, no espaço, um sistema de eixos tri-ortogonais, correspondem, nesta representação plana, três eixos oblíquos que definem as três *direcções principais da representação axonométrica* ou, abreviadamente, as *direcções axonométricas*.

Nesta projecção A, as dimensões aparentes das arestas do cubo sofrem redução, maior ou menor, em relação à sua grandeza real l; sejam a, b, c essas dimensões aparentes, correspondentes a cada uma das direcções axonométricas.

A redução ou *encurtamento* depende, directamente, do ângulo que cada aresta faz, no espaço, com o plano axonométrico P e, por conseguinte, dos ângulos de rotação γ e δ.

Como não fizemos quaisquer restrições aos valores dêstes ângulos, segue-se que as três arestas concorrentes podem ocupar, no espaço, as posições correspondentes às seguintes hipóteses:

1.ª) As três arestas do triedro original fazem ângulos iguais com o plano axonométrico de projecção. Neste, o encurtamento será igual para tôdas as três arestas e a representação diz-se *isométrica*.

2.ª) Duas das arestas do triedro fazem ângulos iguais com o plano axonométrico, a terceira faz um ângulo diferente. A redução será a mesma para as primeiras e diferente para a terceira; a representação chama-se *dimétrica*.

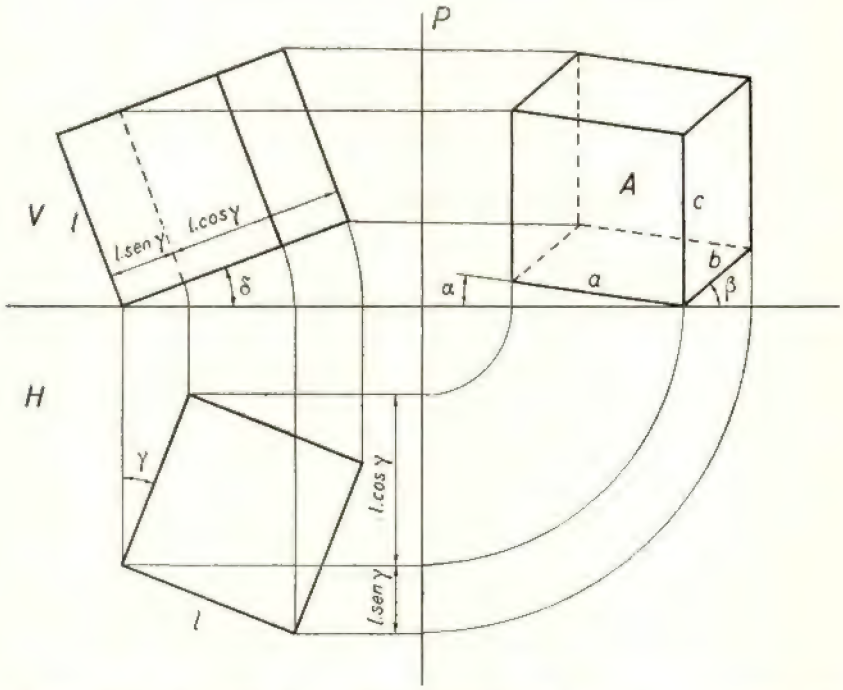


Fig. 2 — Projecções ortogonais e projecção axonométrica do cubo. A, cubo axonométrico.

3.ª) As três arestas fazem ângulos todos diferentes com o plano. Ha três reduções diferentes e a representação toma o nome de *trimétrica*.

Se chamarmos *parâmetros* da projecção às dimensões aparentes da aresta unidade, isto é, aos quocientes $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$, $\frac{c}{l}$ entre as grandezas aparentes e real das arestas do cubo (ou de quaisquer segmentos a elas paralelos), teremos a seguinte classificação simples das três espécies possíveis de representação axonométrica:

Projecção axonométrica	isométrica	— 3 parâmetros iguais
	dimétrica	— 2 parâmetros iguais
	trimétrica	— 3 parâmetros diferentes

Às duas últimas espécies poderemos dar, por oposição à primeira, o nome de *projecção anisométrica.*

Propriedades fundamentais

Retomemos o cubo axonométrico (*fig. 2*), designemos por α e β os ângulos que as arestas a e b fazem com uma direcção de referência normal a c, direcção que será, portanto, a horizontal do plano de perfil em que se fêz a representação axonométrica considerada.

Projectando os diferentes segmentos sôbre a horizontal, temos:

$$a \,.\, \cos \alpha = l \,.\, \cos \gamma \qquad (1)$$
$$b \,.\, \cos \beta = l \,.\, \operatorname{sen} \gamma \qquad (2)$$

e projectando sôbre a vertical, vem:

$$a \,.\, \operatorname{sen} \alpha = l \,.\, \operatorname{sen} \gamma \,.\, \operatorname{sen} \delta \qquad (3)$$
$$b \,.\, \operatorname{sen} \beta = l \,.\, \cos \gamma \,.\, \operatorname{sen} \delta \qquad (4)$$

$$\boxed{c = l \,.\, \cos \delta} \qquad (5)$$

Multipliquemos (*1*) por (*3*) e (*2*) por (*4*):

$$a^2 . \operatorname{sen} \alpha \,.\, \cos \alpha = l^2 . \operatorname{sen} \gamma \,.\, \cos \gamma \,.\, \operatorname{sen} \delta$$
$$b^2 . \operatorname{sen} \beta \,.\, \cos \beta = l^2 . \operatorname{sen} \gamma \,.\, \cos \gamma \,.\, \operatorname{sen} \delta$$

donde

$$\boxed{a^2 . \operatorname{sen} \alpha \,.\, \cos \alpha = b^2 . \operatorname{sen} \beta \,.\, \cos \beta} \qquad (6)$$

ou

$$\boxed{a^2 . \operatorname{sen} 2\,\alpha = b^2 . \operatorname{sen} 2\,\beta} \qquad (7)$$

Estas expressões (*6*) e (*7*) são duas formas da relação geral que, na projecção axonométrica, liga as dimensões aparentes a e b duma mesma grandeza l (tomada sôbre os eixos principais do modêlo) com os ângulos α e β que as respectivas direcções fazem com a direcção normal à direcção de c no plano axonométrico. A dimensão de c é dada pela expressão (*5*).

Reciprocidade das direcções principais

Dissemos atrás, propositadamente, que os ângulos α e β se referiam a uma direcção normal a c, direcção que é a projecção, no plano axonométrico, da recta de nível em tôrno da qual se supôs efectuada a rotação δ do cubo (ou do triedro) original. No nosso exemplo de génese da projecção axonométrica, essa direcção é a horizontal do plano axonométrico.

Mas, em virtude da regularidade de formas e de dimensões do modêlo, e da conseqüente igualdade de posições relativas em que se acham os elementos correspondentes de três arestas concorrentes (ou de três faces contíguas), o raciocínio é válido e as fórmulas

manteem-se, *mutatis mutandis,* qualquer que seja a direcção axonométrica que venha a ficar, anàlogamente, por efeito da escôlha doutro eixo de rotação e doutro plano de projecção, normal à direcção de orígem dos ângulos de direcção.

Ha, portanto, três direcções de referência para as quais se verificam as expressões gerais (5), (6) e (7), direcções que são as normais a cada uma das direcções principais, contanto que os ângulos se refiram, como é óbvio, às outras duas destas direcções axonométricas, de acôrdo com a seguinte comutação (*fig. 3*):

se nas fórmulas (6) e (7) figurarem		na fórmula (5) figurarão
a, b	α, β	c, δ
a, c	α', γ'	b, δ'
b, c	β'', γ''	a, δ''

sendo δ, δ', δ'' as inclinações do cubo original sôbre o plano projectante do segundo eixo de rotação sôbre o plano axonométrico.

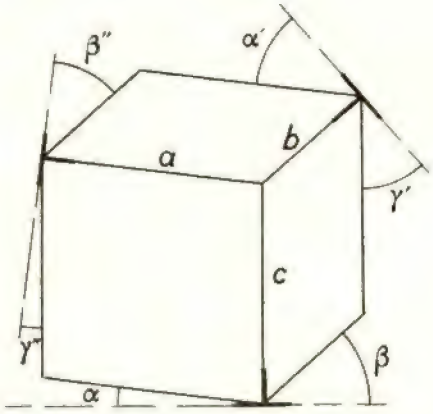


Fig. 3 — Reciprocidade das direcções principais axonométricas. O sinal ⊥ indica perpendicularidade.

A esta propriedade da projecção axonométrica poderemos chamar *reciprocidade* das direcções principais e veremos, mais adiante, o seu alcance na simplificação das regras do desenho.

Reversão e interpretação perspectiva

Se considerarmos o cubo modêlo opaco e supuzermos as rotações γ e δ (uma ou ambas) efectuadas em sentido contrário ao exemplificado, obteremos quatro representações diferentes (*fig. 4*). Interessa estabelecer, para a prática do desenho, certas relações que existem entre essas figuras geométricas do plano axonométrico.

É fácil de ver que, mudando o sinal de uma das rotações, os ângulos α e β mudam ambos de sinal; se mudarmos o sinal de ambas elas, os sinais de α e β conservam-se ambos. As figuras são portanto sobreponíveis duas a duas, isto é, as projecções dos 8 vértices coïncidem dentro de cada um dos dois casos considerados.

Mas, dum para outro dos dois grupos de figuras existe uma *reversão* dos ângulos α e β, reversão que é forçosamente simultânea. Com efeito, e como confirmação analítica, a fórmula fundamental (7) mostra que, quando mudarmos o sinal dum dêstes ângulos, o outro terá também de mudar de sinal, visto que a^2 e b^2 são sempre positivos.

Quere dizer, *os quatro ângulos que entre si fazem as duas direcções principais oblíquas à direcção de referência serão, sempre, seccionados por esta e pela terceira direcção principal* (normal à dita direcção de referência), tal como no exemplo que nos serviu de base.

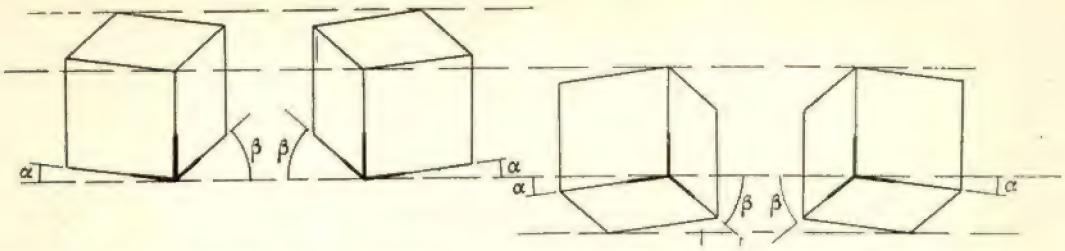


Fig. 4 — Os 4 aspectos do cubo axonométrico, correspondentes aos dois sistemas de direcções principais com os mesmos ângulos de direcção α e β.

A utilização de direcções principais que não obedeçam a esta regra (*fig. 5*), é errónea, e é forçoso evitá-la porque conduz a representações deformadas, incompatíveis com a génese da projecção axonométrica.

Até aqui, o aspecto puramente geométrico do problema. Se, porém, considerarmos as quatro representações já referidas do cubo como aspectos diferentes que êle apresenta para um observador olhando normalmente ao plano de projecção, isto é, como perspectivas paralelas do cubo, teremos as impressões visuais correspondentes à observação do mesmo cubo rodado para a direita ou para a esquerda e inclinado para a frente ou para trás.

Nesta interpretação perspectiva, o observador tem a tendência natural para considerar a aresta *c*, cuja verticalidade é apenas aparente, como tendo, no espaço, verticalidade real, ou seja a direcção do fio de prumo; essa impressão subjectiva equivale a considerar a face (*a, b*) como horizontal e as faces (*a, c*) e (*c, d*) como verticais, apresentando-se estas mais ou menos *de frente* ou mais ou menos *de cutelo* (ou *em profundidade*), conforme os valores de α e β, que dependem da rotação γ.

Esta interpretação é lícita e perfeitamente compatível com o mecanismo da projecção axonométrica: basta supor que é nula a rotação δ do modêlo e que o plano de projecção, conservando-se de perfil, faz um ângulo δ com a vertical, para restabelecermos a equivalência geométrica entre a projecção axonométrica e a interpretação perspectiva considerada.

É manifesto que tem de se supor, como é, de resto, lógico, que a observação continua a fazer-se normalmente ao plano de projecção, portanto em direcção oblíqua à aresta *c*, o que dá o resultado de esta sofrer o mesmo encurtamento aparente que no caso anterior.

Os quatro aspectos supracitados do cubo, agora considerado como tendo, no espaço, quatro arestas ou faces verticais, correspondem assim às impressões visuais de observação de cima e da direita, de cima e da esquerda, de baixo e da direita, e de baixo e da esquerda. Anàlogamente, para qualquer outro objecto modêlo a três dimensões[c].

Se o modêlo não for um cubo, mas uma peça com três dimensões diferenciadas tomadas sôbre os seus eixos principais, cada uma das três direcções diferentes que uma das dimensões pode ocupar no espaço, dará origem a que a peça apresente quatro aspectos diferentes correspondentes aos quatro pontos de vista supracitados; ao todo, teremos 12 aspectos. Isto no caso da peça ter ainda 3 planos de simetria; se faltam um, dois ou

(c) O assunto da distinção entre projecção axonométrica e perspectiva paralela presta-se a interessante discussão, mas entra no domínio da filosofia das coisas, saindo do âmbito do presente artigo.

três dêles, o número de aspectos possíveis duplica sucessivamente e atinge, portanto, 96, embora metade dêles não sejam distintos porque resultam de simples rotações das figuras no plano do desenho.

Propriedades comuns da isometria e da dimetria

Segundo a classificação feita, êstes dois géneros de representação teem, pelo menos, dois parâmetros iguais, isto é, as dimensões de três (ou duas) das arestas concorrentes num vértice do cubo axonométrico são iguais.

Tomemos então essas duas arestas concorrentes, por exemplo a e c (na isometria, qualquer par de arestas concorrentes serve para o efeito). Ensina a geometria e é, de resto, intuitivo, que a direcção da terceira aresta b será a bissectriz do ângulo formado pelas duas primeiras (*fig. 6*).

Sendo assim, e empregando a direcção normal a c para origem dos ângulos, como anteriormente, e a mesma nomenclatura para êstes, temos:

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ \qquad (8)$$

e, da expressão (7), tiramos:

$$a^2 \,.\, sen\ 2\alpha = b^2 \,.\, cos\ \alpha \qquad (9)$$

ou

$$2a^2 \,.\, sen\ \alpha = b^2 \qquad (10)$$

Fig. 5 — Diversos sistemas incorretos de direcções axonométricas.

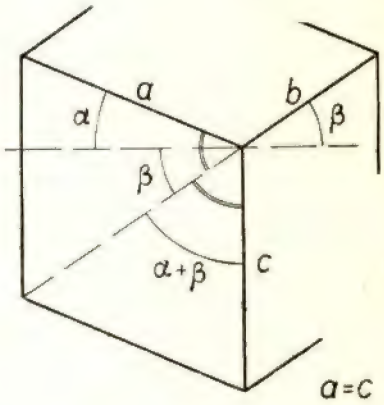


Fig. 6 — Nas projecções isométrica e dimétrica, o ângulo de duas direcções principais com igual parâmetro é bissectado pela terceira.

relações que permitem fàcilmente deduzir as propriedades características especiais das duas espécies mais importantes da projecção axonométrica, que damos a seguir.

Representação isométrica

Característica fundamental:

$$\boxed{a = b = c}$$

As três faces distintas do cubo serão representadas por losangos iguais e cada uma das arestas que separa duas faces (direcção principal axonométrica) é a diagonal da outra face (*fig. 7*).

Das relações (8) e (10) conclúi-se:

$$sen\ \alpha = \frac{b^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{90 - \alpha}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha = 30^\circ \\ \beta = 30^\circ \end{array}}$$

Os ângulos das três direcções principais, entre si, serão todos iguais a 120°.

Para achar o encurtamento das arestas, determinando ao mesmo tempo os valores de γ e δ que dão origem a êste tipo de representação, basta conjugar convenientemente as expressões (*1*) com (*2*) e (*3*) ou (*4*) com (*5*), donde resulta sucessivamente[d]:

$$tg\,\gamma = 1 \qquad \boxed{\gamma = 45^\circ} \qquad sen\,\gamma \cong 0{,}707$$

$$tg\,\delta = \frac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma} = \frac{0{,}5}{0{,}707} \cong 0{,}707$$

$$\boxed{\delta \cong 35^\circ\ 16'}$$

$$\boxed{a = b = c = l\,.\,cos\,\delta \cong 0{,}816\,l}$$

A execução do desenho em axonometria isométrica é fácil, pois o simples esquadro de 30 — 60° dá as direcções principais sem necessidade de transferidor ou de ferramenta especial. Mas a própria simetria e regularidade da representação pode ser um inconveniente para as peças simples e regulares, porquanto se verificam sobreposições de linhas que prejudicam a facilidade da interpretação perspectiva.

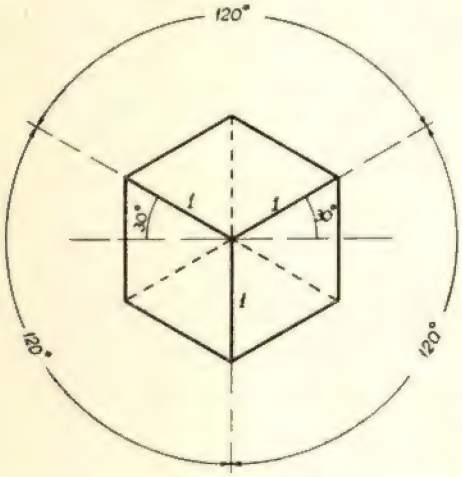


Fig. 7 – Projecção isométrica ($a = b = c$) Notação usual 1 : 1 : 1.

Representação dimétrica

Característica fundamental:

$$\boxed{a = c \neq b}$$

por exemplo. À variante $a = b \neq c$ pode dar-se o nome de projecção ou perspectiva monodimétrica.

Com a primeira relação de arestas, a direcção de b será a diagonal do losango formado pela face (a,c); as duas faces (a,b) e (b,c) são paralelogramos iguais (*fig. 8*).

Da mesma forma que anteriormente,

$$sen\,\alpha = \frac{b^2}{2a^2} = \frac{b^2}{2c^2}$$

$$\beta = \frac{90 - \alpha}{2}$$

(d) Nos cálculos numéricos que seguem, empregámos apenas 3 decimais duma tabela de valores naturais das linhas trigonométricas, aproximação mais que suficiente para o fim em vista; ulteriormente, faremos mesmo arredondamentos que atingem vários minutos sexagesimais, a-fim-de apresentar números compatíveis com a prática corrente do desenho.

As diferentes relações de grandeza entre a e b darão origem a uma infinidade de representações dimétricas, com a única condição, evidentemente, de ser

$$0 < \frac{b^2}{2a^2} < 1 \quad ou \quad b < a\sqrt{2}$$

As relações mais usadas, por permitirem mais agradável interpretação perspectiva do cubo axonométrico ou da representação de qualquer modêlo a três dimensões, e também por facilidade de aplicação, são duas:

$$b = \frac{1}{2}\,a = \frac{1}{2}\,c \qquad\qquad b = \frac{6}{10}\,a = \frac{6}{10}\,c$$

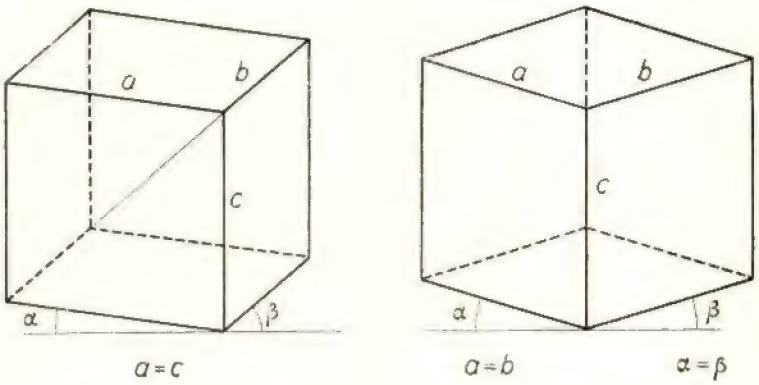


Fig. 8 — Projecções dimétrica e monodimétrica do cubo.

Seguindo a fácil marcha já indicada, vamos achar sucessivamente, para êstes dois casos particulares, os ângulos α e β das direcções axonométricas principais com a horizontal de referência, os ângulos de rotação γ e δ do cubo modêlo, os ângulos das direcções principais entre si e os encurtamentos das arestas.

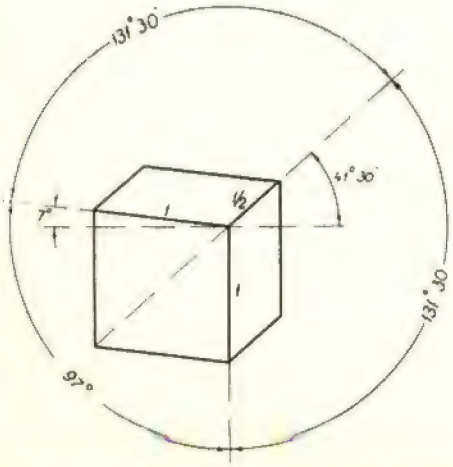


Fig. 9 — Projecção dimétrica ($a = c = 2b$)
Notação usual 1 : 1 : 1/2

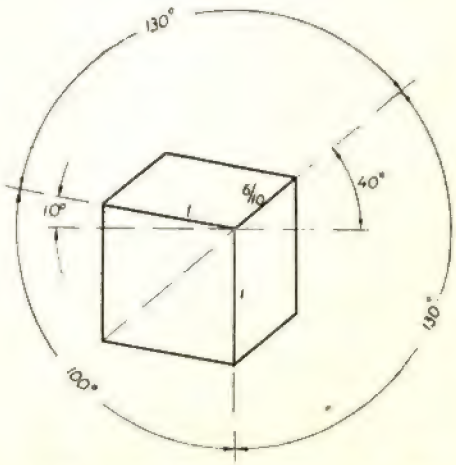


Fig. 10—Projecção dimétrica ($a=c=10/6b$).
Notação usual 1 : 1 : 6/10.

1.º exemplo (*fig. 9*) —

Dados:

$$\boxed{a = c = 2\,b}$$

$$sen\ \alpha = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \cong 7^\circ\ 11' \\ \beta \cong 41^\circ\ 24'\ 30'' \end{array}}$$

$$sen\ \beta \cong 0{,}661$$

$$tg\ \gamma = 2 \cdot \frac{0{,}125}{0{,}661} \cong 0{,}378$$

$$\boxed{\gamma \cong 20^\circ\ 42'}$$

$$sen\ \gamma \cong 0{,}353$$

$$tg\ \delta = \frac{0{,}125}{0{,}353} \cong 0{,}354$$

$$\boxed{\delta \cong 19^\circ\ 30'}$$

Ângulos das direcções principais:

$97^\circ\ 11'$ $\quad 131^\circ\ 24'\ 30''$ $\quad 131^\circ\ 24'\ 30''$

Reduções das arestas:

$$\boxed{a = c = l \cdot \cos\delta \cong 0{,}94\ l}$$

$$\boxed{b \cong 0{,}47\ l}$$

2.º exemplo (*fig. 10*) —

Dados:

$$\boxed{a = c = \frac{10}{6}\,b}$$

$$sen\ \alpha = \frac{36}{200} = 0{,}180$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \cong 10^\circ\ 23' \\ \beta \cong 39^\circ\ 48'\ 30'' \end{array}}$$

$$sen\ \beta \cong 0{,}640$$

$$tg\ \gamma = \frac{10}{6} \cdot \frac{0{,}180}{0{,}640} \cong 0{,}469$$

$$\boxed{\gamma \cong 25^\circ\ 8'}$$

$$sen\ \gamma \cong 0{,}425$$

$$tg\ \delta = \frac{0{,}180}{0{,}425} \cong 0{,}424$$

$$\boxed{\delta = 22^\circ\ 59'}$$

Ângulos das direcções principais:

$100^\circ\ 23'$ $\quad 129^\circ\ 48'\ 30''$ $\quad 129^\circ\ 48'\ 30''$

Reduções das arestas:

$$\boxed{a = c = l \cdot \cos\delta \cong 0{,}92\ l}$$

$$\boxed{b \cong 0{,}55\ l}$$

Anàlogamente se procederia para outras relações de grandeza entre a, b e c.

A aplicação ao desenho trimensional da axonometria dimétrica é, portanto, menos áfcil que a da isométrica; para maior rapidez na marcação das grandezas segundo as direcções principais, usam-se correntemente esquadros especiais com os ângulos convenientes, tendo ou não graduações com as reduções correspondentes a essas direcções (*fig. 11*).

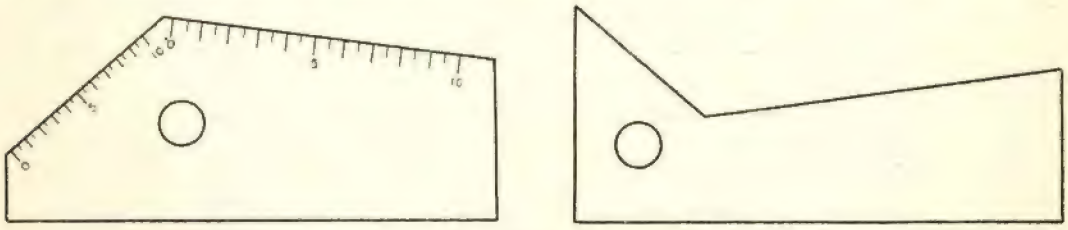


Fig. 11 — Esquadros para desenho em projecção axonométrica.

Representação trimétrica

Característica fundamental:

$$\boxed{a \neq b \neq c \neq a}$$

Como os parâmetros são todos diferentes, o emprêgo dêste tipo de axonometria torna-se mais trabalhoso. Por isso, só se usa na prática, e ràramente, em certos casos especiais onde apresenta qualquer vantagem particular (cristalografia, geometria descritiva).

No entanto e a título de exercício, vamos fazer-lhe referência rápida.

São, ainda, as relações fundamentais (5) e (7) que nos permitirão achar os valores dos elementos que interessam ao desenho (parâmetros a, b, c e ângulos de direcção α e β), arbitrando dois dos parâmetros (ou duas relações entre êles) e um dos ângulos (ou a relação entre êstes).

O caso mais freqüente é o de fixarmos as relações entre os parâmetros, o que equivale a tomar um dêles como unidade, e arbitrar α (ou β); a simples aplicação da fórmula (7) dará logo β (ou α). Se preferirmos arbitrar uma relação entre α e β, obteremos os valores absolutos de ambos êstes ângulos.

Seja como fôr, é indispensável que os dados sejam compatíveis e não conduzam a impossibilidade geométrica ou trigonométrica. Seguem diversos exemplos numéricos, nalguns dos quais, para facilitar comparações com a representação dimétrica, empregamos valores iguais ou semelhantes aos que se usam para esta.

Fórmula geral:

$$a^2 . \, sen \, 2\alpha = b^2 . \, sen \, 2\beta \qquad (7)$$

ou seja

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 2\alpha} = \frac{a^2}{b^2}$$

1.º exemplo —

Dados:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 9/10 \; c \\ b = 1/2 \; c \end{array}}$$

$$\boxed{\alpha = 7^\circ \; 11'}$$

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 14^\circ \, 22'} = \frac{0{,}81}{0{,}25} = 3{,}24$$

$$sen \, 2\beta = 3{,}24 \times 0{,}248 = 0{,}803$$

$$2\beta \cong 53^\circ \, 28'$$

$$\boxed{\beta \cong 26^\circ \, 44'}$$

2.º exemplo —

Dados:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 9/10 \; c \\ b = 6/10 \; c \end{array}}$$

$$\boxed{\alpha = 10^\circ \, 23'}$$

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 20^\circ \, 46'} = \frac{0{,}81}{0{,}36} = 2{,}25$$

$$sen \, 2\beta = 2{,}25 \times 0{,}354 = 0{,}797$$

$$2\beta \cong 52^\circ \, 50'$$

$$\boxed{\beta \cong 26^\circ \, 25'}$$

3.º exemplo —

Dados:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 9/10 \; c \\ b = 1/2 \; c \end{array}}$$

$$\alpha = 1/2 \, \beta$$

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 2\alpha} = \frac{2 . \, sen \, \beta . \, cos \, \beta}{sen \, \beta} = \frac{0{,}81}{0{,}25}$$

$$cos \, \beta = 1{,}62$$

Os dados são incompatíveis.

4.º exemplo —

Dados:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 9/10 \; c \\ b = 7/10 \; c \end{array}}$$

$$\alpha = 1/2 \, \beta$$

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 2\alpha} = \frac{2 . \, sen \, \beta . \, cos \, \beta}{sen \, \beta} = \frac{0{,}81}{0{,}49}$$

$$cos \, \beta = 0{,}8265$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta \cong 34^\circ \, 16' \\ \alpha \cong 17^\circ \, 8' \end{array}}$$

5.º exemplo —

Dados:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 8/10 \; c \\ b = 7/10 \; c \end{array}}$$

$$\alpha = 1/2 \, \beta$$

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 2\alpha} = \frac{2 . \, sen \, \beta . \, cos \, \beta}{sen \, \beta} = \frac{0{,}64}{0{,}49}$$

$$cos \, \beta = 0{,}653$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta \cong 49^\circ \, 14' \\ \alpha \cong 24^\circ \, 37' \end{array}}$$

6.º exemplo —

Dados:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 5/6 \; c \\ b = 4/6 \; c \end{array}}$$

$$\boxed{\alpha = 9^\circ}$$

$$\frac{sen \, 2\beta}{sen \, 18^\circ} = \frac{25}{16} \cong 1{,}562$$

$$sen \, 2\beta \cong 1{,}562 \times 0{,}309 = 0{,}483$$

$$2\beta \cong 28^\circ \, 53'$$

$$\boxed{\beta \cong 14^\circ \, 26'}$$

Se achássemos γ e depois δ, do mesmo modo que empregámos na dimetria, a relação (5) daria o encurtamento da aresta c, donde tiraríamos os das arestas a e b. Estes valores pouco interêsse têm para o desenho, como adiante mostraremos, pelo que nos abstemos de os calcular numèricamente nos casos exemplificados.

Notação usual e resumo dos valores numéricos

As relações de grandeza entre as três arestas a, b, c do triedro axonométrico costumam ser dadas exprimindo uma delas pela unidade, em geral a que é normal à direcção de referência (ou seja aquela que temos designado por c). Esta aresta indica-se em primeiro lugar, seguindo-se as outras duas por ordem de grandeza decrescente.

Por outro lado, a marcação dos ângulos no desenho só é prática aproximando-os aos graus ou, quando muito, aos meios graus.

Podemos então estabelecer o seguinte quadro de valores aproximados [e]:

Projecção axonométrica	Símbolo (relações das arestas)	Ângulos das direcções principais		Coeficientes de encurtamento
		À referência	Entre si	
Isométrica	1 : 1 : 1	90° 30° 30°	120° 120° 120°	0,82 0,82 0,82
Dimétrica	1 : 1 : 1/2	90° 7° 41° 30′	97° 131° 30′ 131° 30′	0,94 0,94 0,47
	1 : 1 : 6/10	90° 10° 40°	100° 130° 130°	0,92 0,92 0,55
Trimétrica	1 : 9/10 : 1/2	90° 7° 27°	97° 145° 118°	—
	1 : 9/10 : 6/10	90° 10° 26°	100° 144° 116°	—
	1 : 9/10 : 7/10	90° 17° 34°	107° 129° 124°	—
	1 : 8/10 : 7/10	90° 25° 49°	115° 106° 139°	—
	1 : 5/6 : 4/6 (6 : 5 : 4)	90° 9° 14°	99° 157° 104°	—

(e) O 3.º exemplo dêste quadro corresponde à relação de dimensões considerada em certas instruções de origem estrangeira, *para perspectiva dimétrica*, simultâneamente com o emprêgo de ângulos de 7° e de 40°, o que não condiz com o nosso cálculo. No 4.º exemplo, temos as dimensões estabelecidas num ponto de exame de desenho numa das nossas escolas industriais, onde se lê: «Tirar da *perspectiva anisométrica* de parâmetros 1/1, 1/2 e 9/10, respectivamente no eixo vertical, a 40° e 7° ...», o que nos parece ser também impossível em perspectiva normal-paralela. Estas e outras mais discordâncias existem igualmente entre os diversos autores consultados; admitindo que somos nós que nos enganámos, fica de pé a constatação de que reina certa desorientação no assunto e a conveniência de esclarecer os pontos sôbre os quais existe discrepância.

Escala verdadeira e escala convencional

Em rigor, a dimensão unidade do modêlo, tomada nas três direcções principais axonométricas, terá os valores constantes da última coluna do quadro anterior, para um desenho em escala natural.

Êste sistema é, porém, incómodo e é raro que tenha vantagem em relação ao que consiste em tomar como unidade a dimensão que, na representação axonométrica, corresponde à unidade no modêlo, tomada na direcção principal em que o encurtamento é menor. O mesmo é dizer que é de uso corrente aplicar como coeficientes de encurtamento os que constituem o símbolo da projecção, e não os verdadeiros que figuram na última coluna do quadro.

Isto equivale a empregar uma escala gráfica para a representação axonométrica que é, na realidade, a inversa do coeficiente de encurtamento referido (*escala verdadeira*) e à qual, impròpriamente, se dá a designação de escala natural (*escala convencional*).

O mesmo se diria, como é óbvio, para qualquer outra escala gráfica em que se fizesse a projecção axonométrica, pois as relações mantêm-se.

Empregando a escala convencional, a cotagem e a leitura das dimensões no desenho tornam-se mais fáceis, correspondendo as cotas às dimensões gráficas em tôdas as direcções para as quais o coeficiente é, convencionalmente, igual a 1.

Por outro lado, quanto mais o encurtamento convencional se afastar do verdadeiro, mais falseada será a impressão visual, sobretudo no que se refere aos volumes, que aparecerão aumentados na relação dos cubos (terceiras poténcias) dos coeficientes convencional e real [f].

Do exame do quadro anterior resulta a comparação fácil entre os dois géneros mais usados de projecção axonométrica, no que diz respeito ao aumento de dimensões lineares do desenho em conseqüência do emprêgo da escala convencional:

— na isometria, aumento de cêrca de 18 % (em rigor 0,184)
— na dimetria 1 : 1 : 1/2, » » 6 %
— » » 1 : 1 : 6/10, » » 8 %

Esta observação fornece um argumento de certo pêso em favor da dimetria, sobretudo da variante 1 : 1 : 1/2; com efeito, o aumento de dimensões em escala convencional é suficientemente pequeno para não influenciar a vista ou o sentimento construtivo, quer na leitura, quer na execução do desenho (*fig. 12*).

Axonometria do círculo

A representação axonométrica desta figura sôbre qualquer dos três planos definidos pelas direcções principais, obtém-se com facilidade considerando o círculo inscrito na face correspondente do cubo modêlo.

Ensina a geometria que a projecção da circunferência correspondente será sempre uma elipse cujo eixo maior é o diâmetro do círculo, ou seja igual à aresta l do cubo.

O traçado das elipses axonométricas pode fazer-se por pontos a partir da circunferência que lhes dá origem: tomam-se as coordenadas de vários pontos desta e marcam-se os segmentos correspondentes no plano axonométrico, segundo as direcções principais, com

(f) Os americanos e ingleses usam as designações «projecção axonométrica» para a representação em escala real e «desenho axonométrico» para a representação em escala convencional.

as competentes reduções, reais ou convencionais (*fig. 13*). As diagonais dos quadriláteros circunscritos e os pontos de tangência dos lados dêstes com as curvas fornecem pontos notáveis que facilitam ainda o traçado.

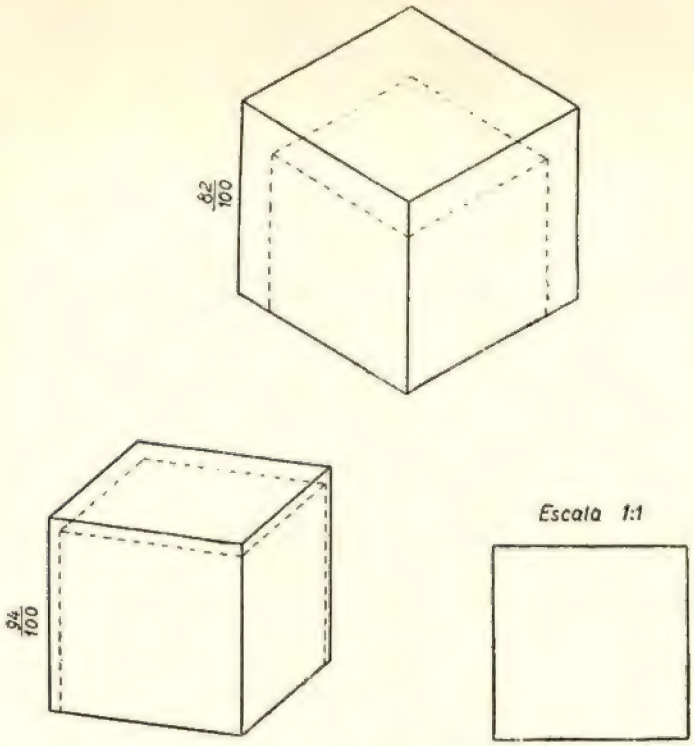


Fig. 12 — Comparação entre os desenhos em escala convencional (traço cheio) e em escala real (traço interrompido) das projecções isométrica e dimétrica 1 : 1 : 1/2 do mesmo cubo cuja grandeza da face se representa também em projecção ortogonal.

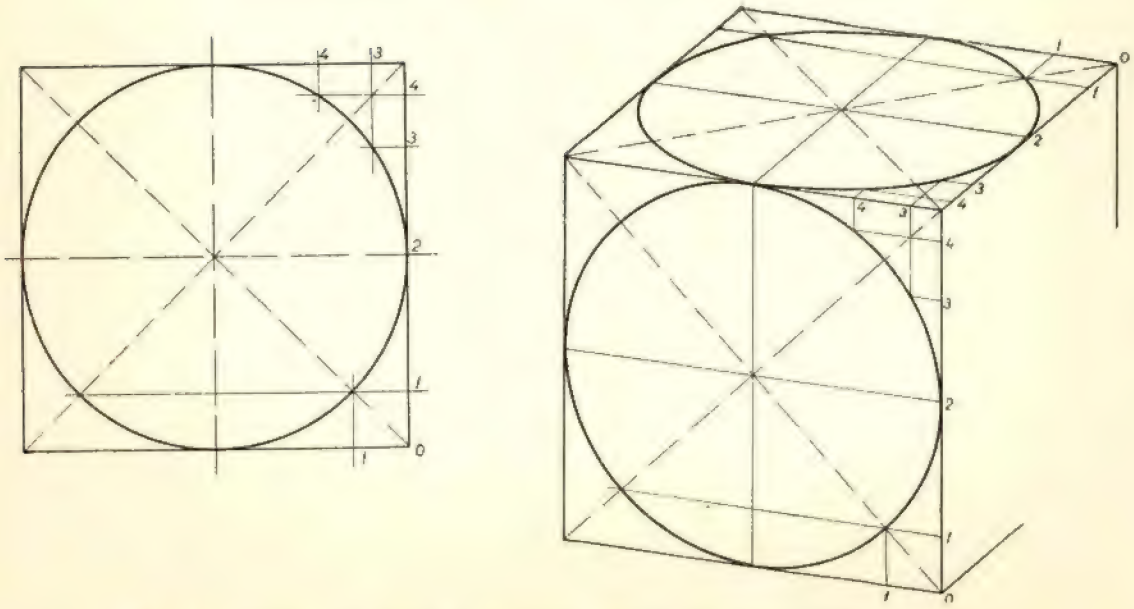


Fig. 13 — Traçado das projecções do círculo (elipses) por coordenadas axonométricas.

Êste processo é geral, mas não pode ser usado quando não se disponha do círculo primitivo ou não convenha traçá-lo para servir de base de partida. Interessa, de resto, caracterizar a forma e a posição das elipses sôbre as três faces do triedro axonométrico, correspondentes aos círculos contidos nos três planos principais do modêlo.

Seja qual fôr o tipo de projecção axonométrica, consideremos então (*fig. 14*) uma das faces do cubo, por exemplo o paralelogramo formado pelas arestas a e b (1.ª e 2.ª direcções principais), com os seus eixos médios AA' e BB'; suponhamos traçada a elipse inscrita e os seus eixos de simetria. Como já sabemos que a grandeza do eixo maior é igual a l, para definir a elipse bastará determinar a posição dêsse eixo no plano axonométrico e a grandeza do eixo menor.

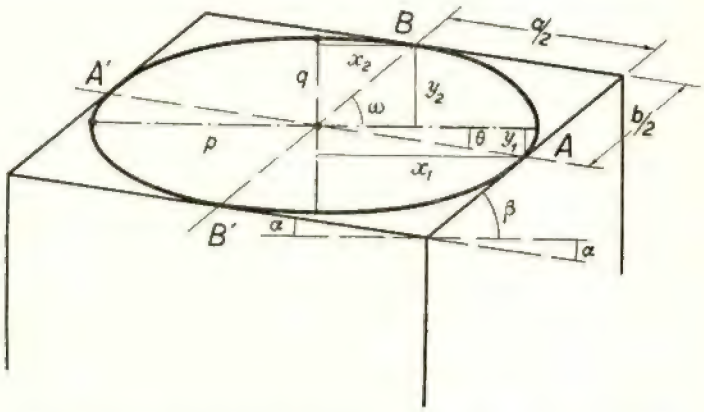


Fig. 14 – Posição dos eixos da elipse axonométrica: $\theta = \alpha$, $\omega = \beta$

Designemos por θ e ω os ângulos do eixo maior com as duas direcções principais correspondentes; sejam p ($= 1/2\ l$) e q as dimensões dos semi-eixos da elipse.

Como os pontos de tangência A e B, de coordenadas ($x_1\ y_1$) e ($x_2\ y_2$) são pontos da curva, a equação da elipse, referida aos seus eixos principais, fornecerá as seguintes relações:

$$\frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} = 1 \qquad\qquad \frac{x_2^2}{p^2} + \frac{y_2^2}{q^2} = 1$$

ou seja

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2 \,.\, cos^2\theta}{4\,p^2} + \frac{a^2 \,.\, sen^2\theta}{4\,q^2} &= 1 \\ \frac{b^2 \,.\, cos^2\omega}{4\,p^2} + \frac{b^2 \,.\, sen^2\omega}{4\,q^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Uma das soluções dêste sistema será, evidentemente,

$$\begin{cases} a \,.\, cos\,\theta = b \,.\, cos\,\omega \\ a \,.\, sen\,\theta = b \,.\, sen\,\omega \end{cases}$$

donde

$$a^2 \,.\, sen\,\theta \,.\, cos\,\theta = b^2 \,.\, sen\,\omega \,.\, cos\,\omega \qquad (12)$$

Comparando esta expressão com a equação (*6*), característica de qualquer projecção axonométrica, concluimos ser

$$\theta = \alpha \qquad\qquad \omega = \beta\,.$$

Quere dizer: o eixo maior da elipse tem exactamente a mesma orientação que a direcção de referência a partir da qual se medem os ângulos α e β das direcções principais. Como essa direcção se tomou normal à aresta c (3.ª direcção principal), segue-se que o eixo menor será paralelo a esta 3.ª direcção [g].

Em virtude da reciprocidade das direcções principais, já estabelecida, análoga dedução se pode aplicar às elipses inscritas nas outras faces do cubo axonométrico, o que permite estabelecer a seguinte propriedade importante da representação axonométrica, abreviadamente enunciada:

A projecção axonométrica de qualquer círculo existente no plano principal do modêlo correspondente a duas direcções principais é uma elipse cujo eixo menor é paralelo à 3.ª direcção principal.

Como corolário, também importante, temos que a posição dos eixos da elipse é sempre a mesma, qualquer que seja a orientação das direcções principais correspondentes, contanto que não varie a orientação da terceira direcção principal (*fig. 15*).

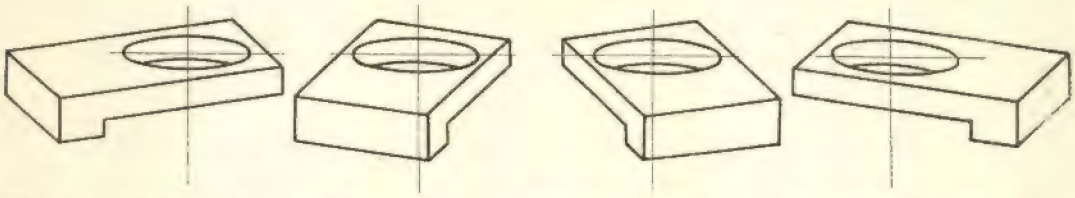


Fig. 15 — Invariabilidade da orientação dos eixos das elipses quando uma das direcções principais se mantém.

A grandeza do eixo menor da elipse dependerá, como é natural, dos parâmetros e dos ângulos de direcção. Podemos achar a sua relação para o eixo maior retomando o sistema de equações (*11*), donde se tira:

$$\frac{a^2 \cdot \cos^2 \theta}{4\,p^2} + \frac{a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta}{4\,q^2} = \frac{b^2 \cdot \cos^2 \omega}{4\,p^2} + \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \omega}{4\,q^2}$$

expressão que é verificada quando fôr, simultâneamente,

$$\frac{a \cdot \cos \theta}{p} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \omega}{q} \qquad \frac{a \cdot \operatorname{sen} \theta}{q} = \frac{b \cdot \cos \omega}{p}$$

o que fornece a relação procurada:

$$\frac{q}{p} = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \alpha}{b \cdot \cos \beta} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \beta}{a \cdot \cos \alpha} \qquad (13)$$

Casos particulares —

A) Na projecção isométrica 1 : 1 : 1 ($a = b = c$), será

$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = tg\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(g) A esta mesma conclusão se chegaria por via geométrica.

Gràficamente, bastará portanto empregar o esquadro de 30 — 60° para achar a dimensão do eixo menor da elipse a partir do eixo maior (*fig. 16*).

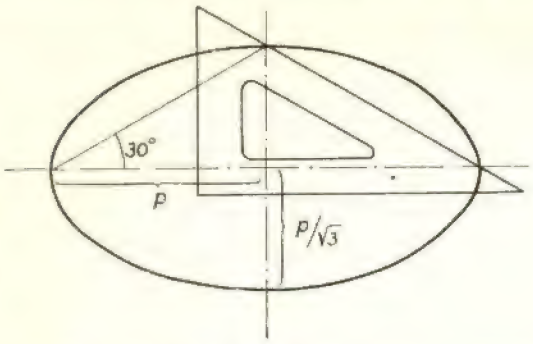


Fig. 16 — Relação entre os eixos maior e menor das elipses na projecção isométrica.

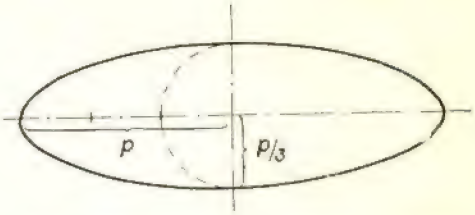


Fig. 17 — Relação entre os eixos maior e menor da elipse alongada na projecção dimétrica 1 : 1 : 1,2

B) Na projecção dimétrica 1 : 1 : 1,2 ($a = 2b = c$), teremos

1) Face (a, b) ou (b, c):

$$\frac{q}{p} = \frac{a}{b} \cdot \frac{sen\ 7^\circ\ 11'}{cos\ 41^\circ\ 25'} = 2 \cdot \frac{0{,}125}{0{,}750} = \frac{1}{3}$$

Na prática, divide-se o semi-eixo maior em 3 partes e transporta-se uma delas sôbre a direcção normal (*fig. 17*).

2) Face (a, c):

$$\frac{q'}{p} = \frac{a}{c} \cdot \frac{sen\ 41^\circ\ 25'}{cos\ 41^\circ\ 25'} \simeq 0{,}9$$

A excentricidade da elipse é, neste caso, tão pequena, que muitas vezes se substitui por um círculo de diâmetro $a = c$, o que dá maior rapidez ao desenho sem inconveniente de maior, como se mostra em exemplos figurados adiante.

Para outras projecções anisométricas de quaisquer parâmetros, as relações entre os eixos das elipses achar-se-iam do mesmo modo; de resto, são em geral mais complicadas e o seu interêsse para o desenho é restrito.

Em todos os casos, sempre que as dimensões do desenho não sejam excessivamente grandes, bastarão os pontos notáveis atrás citados para dar o andamento da curva, atendendo ainda a que ela é normal aos eixos principais nos 4 extremos dêstes.

Lembremos ainda que as medianas dos quadriláteros circunscritos às elipses axonométricas, paralelas às tangentes que formam êsses quadriláteros (ou seja às direcções principais correspondentes), são diâmetros conjugados das elipses, gozando portanto das propriedades importantes conhecidas da geometria (*fig. 18*).

A representação de círculos não contidos nos planos principais do modêlo obter-se-á definindo os paralelogramos correspondentes ao plano considerado e inscrevendo nêles as elipses, tal como se os lados dêsses paralelogramos fôssem as direcções principais axonométricas (ver adiante a *fig. 27*).

Axonometria dos polígonos regulares

Êste problema não oferece quaisquer dificuldades e pode sempre tratar-se pelos processos gerais. Mas a representação de cabeças de parafusos e porcas sextavadas, de fura-

ções em uniões de tubos ou de veios, de volantes ou manípulos com braços radiais, etc., é tão freqüente no desenho técnico, que se torna conveniente estabelecer regras expeditas, independentes da projecção ortogonal corrente dessas peças ou dispositivos.

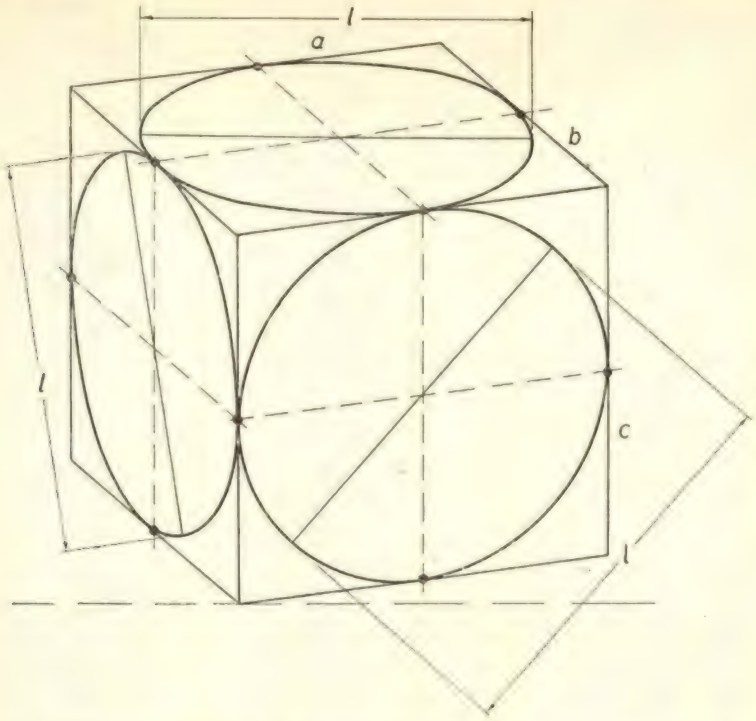


Fig. 18 — Projecções do círculo (elipses axonométricas) com indicação dos diâmetros conjugados e eixos maiores. Em escala real, $l = \phi$ do círculo.

O caso resume-se, quási sempre, a achar os pontos da elipse axonométrica correspondentes à divisão da circunferência primitiva em 6 ou 8 partes iguais, com base nas propriedades do hexágono e do octógono regulares.

A divisão em 6 (ou 3) partes obter-se-á dividindo ao meio qualquer dos semi-diâmetros conjugados da elipse e transportando os pontos médios assim obtidos sôbre a curva,

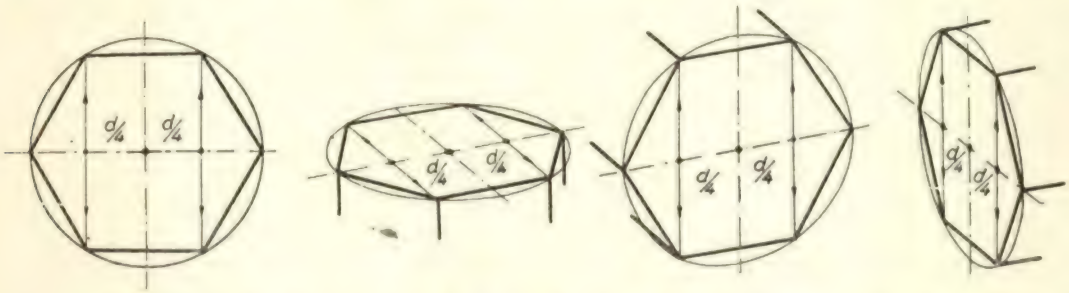


Fig. 19 – Divisões da circunferência em 6 partes iguais (escala convencional).

paralelamente ao outro diâmetro conjugado. Conforme o semi-diâmetro que se divide, assim se obtém o hexágono axonométrico com um dos lados paralelos a uma ou outra das direcções principais (*fig. 19*).

Quanto à divisão em 8 (ou 4) partes, acham-se simplesmente os pontos de intersecção da elipse com as diagonais do paralelogramo circunscrito (*fig. 20*); se se aprovei-

tarem só 4 dos pontos assim obtidos, teremos um quadrilátero que pode ter ou não os lados paralelos às direcções principais.

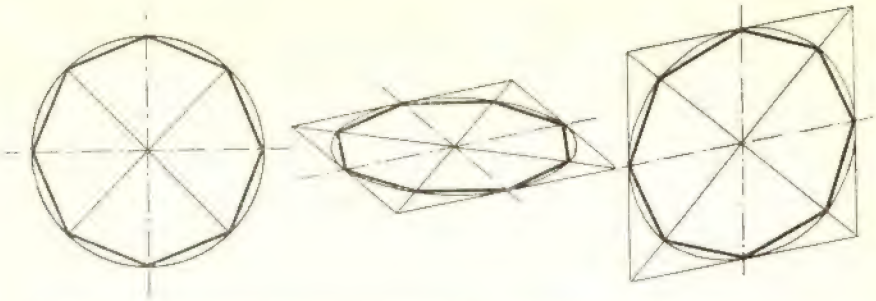


Fig. 20 — Divisão da circunferência em 8 partes iguais (escala convencional).

Axonometria do cilindro, cone e esfera

O contórno aparente dum tronco cilíndrico cujo eixo seja paralelo a uma direcção principal obter-se-á desenhando a elipse que representa a sua secção recta e cujos diâmetros conjugados são as outras duas direcções principais, e traçando as duas geratrizes extremas. Como estas são as tangentes à elipse nos vértices e portanto paralelas ao seu eixo menor, podemos enunciar mais uma propriedade importante da projecção axonométrica:

«A secção recta dum cilindro circular é limitada por uma elipse cujo eixo menor coïncide com o eixo do cilindro, sendo as geratrizes do contórno aparente dêste tangentes à elipse nos extremos do eixo maior.» (*fig. 21*).

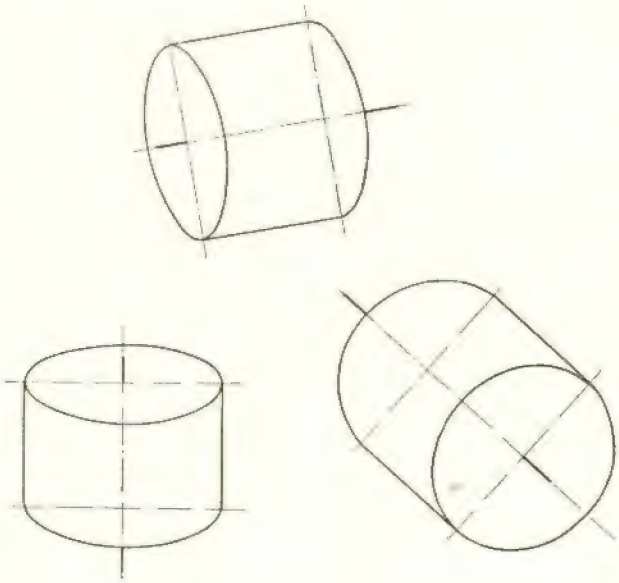


Fig. 21 — Cilindro nas três posições principais

Combinando estas considerações com outras já feitas, resultam duas conseqüências notáveis. Primeira: o diâmetro aparente do cilindro, quando se desenhe em escala convencional, é maior que o verdadeiro, como é óbvio; a relação é a inversa do coeficiente de encurtamento correspondente. Segunda: em comparação com outros géneros de represen-

tação, tais como a perspectiva cavaleira, a perspectiva normal *DIN*, etc., a projecção axonométrica dá uma representação do cilindro e da sua secção recta muito mais conforme e agradável à vista do que aquelas (*fig. 22*).

A representação do cone conseguir-se-á, sem a menor dificuldade, tirando do vértice as duas tangentes à elipse que representa o contôrno duma secção recta qualquer; se a posição do vértice não é conhecida, tirar-se-ão as tangentes exteriores comuns a duas secções rectas (*fig. 23*), constituindo um tronco de cone.

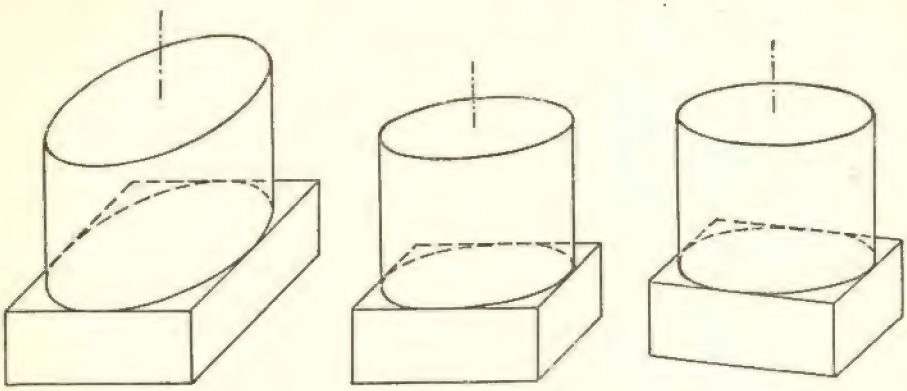


Fig. 22 — Perspectiva cavaleira 1:1:1, perspectiva normal *DIN (cabinet projection)* 1:1:1/2 e projecção axonométrica 1:1:1/2 da mesma coluna cilíndrica sôbre base quadrada.

Da própria definição de projecção axonométrica se conclui que uma esfera será necessàriamente representada por um círculo de diâmetro igual ao da esfera, em escala real, e de diâmetro superior, em escala convencional. Quando o centro da esfera puder ser marcado no plano axonométrico, bastará o compasso para traçar êsse círculo máximo [h].

O contôrno da esfera no plano axonométrico pode também ser considerado como a envolvente das elipses que representam os três círculos máximos contidos nos planos principais (*fig. 24*). O resultado é o mesmo, e, embora nalguns tratados e instruções se indique êste método, não lhe encontramos vantagem para o desenho, considerando que tem apenas interêsse especulativo. Com efeito, os elementos indispensáveis para traçar essas elipses permitem determinar imediatamente o raio da esfera e a posição do seu centro no plano axonométrico, traçando-se a compasso o contôrno aparente com mais facilidade e rapidez.

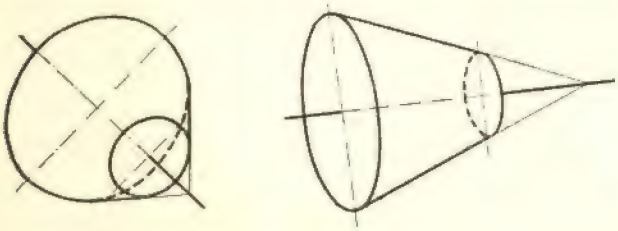


Fig. 23 — Projecções do cone.

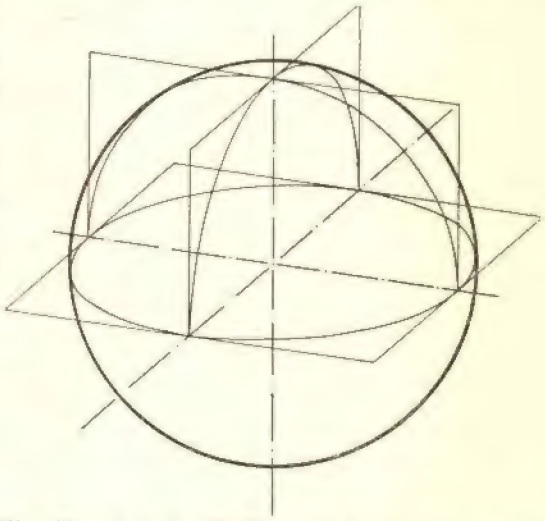


Fig. 24 — A projecção da esfera é um círculo, envolvente das elipses meridianas contidas nos três planos principais.

(h) É curioso notar que a representação da esfera nas perspectivas cavaleira e derivadas não é um círculo, o que não é fácil de conciliar com a impressão visual directa.

O contôrno aparente duma calote esférica (cabeça de rebite), será a combinação do círculo que representa a esfera com a elipse que representa a base da calote (*fig. 25*), tendo as duas curvas sempre dois pontos de tangência interior à primeira.

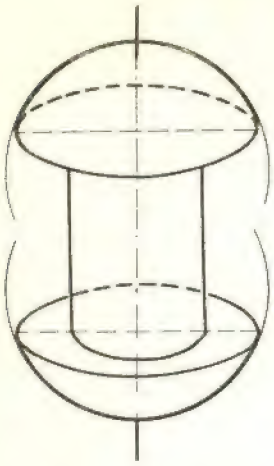


Fig. 25 — Projecções da calote esférica (cabeças de rebite).

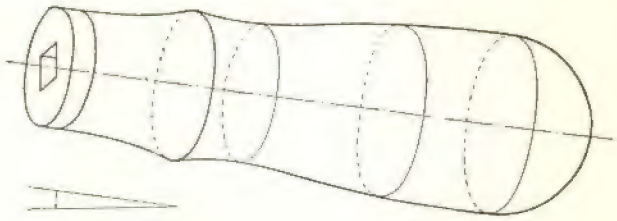


Fig. 26 — Corpo de revolução (cabo de ferramenta).

A representação de sólidos de revolução mais complexos, incluindo o toro, acha-se geralmente traçando a projecção de secções rectas sucessivas, contidas ou não nos planos principais axonométricos: o contôrno aparente será a envolvente das diferentes secções, tangente às elipses que as limitam nos extremos dos eixos maiores destas (*fig. 26* e 27).

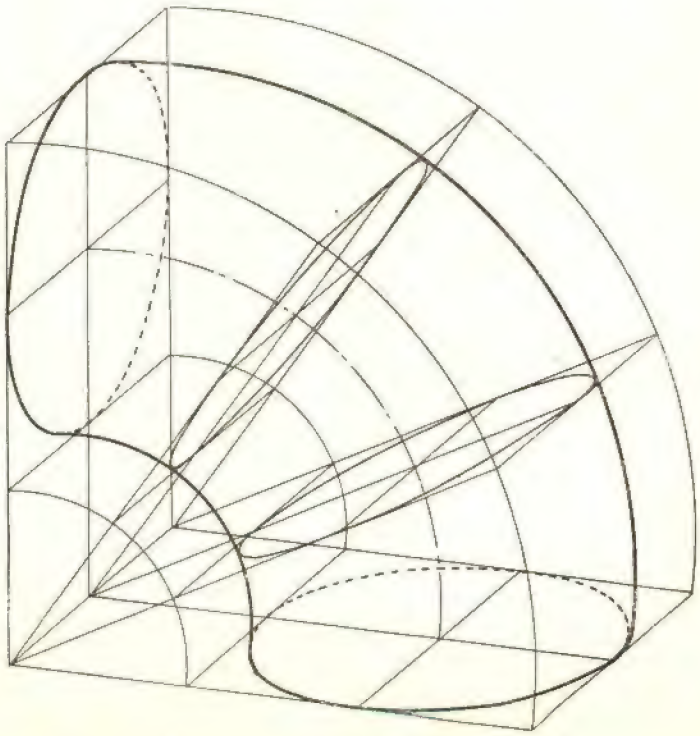


Fig. 27 — Um quarto de toro circular (cotovêlo de tubo)

Cortes e tracejados

Do mesmo modo que na projecção ortogonal simples, na representação axonométrica recorre-se freqüentes vezes ao emprêgo de cortes, totais ou parciais, para facilitar a definição da forma e das dimensões dos elementos das peças desenhadas.

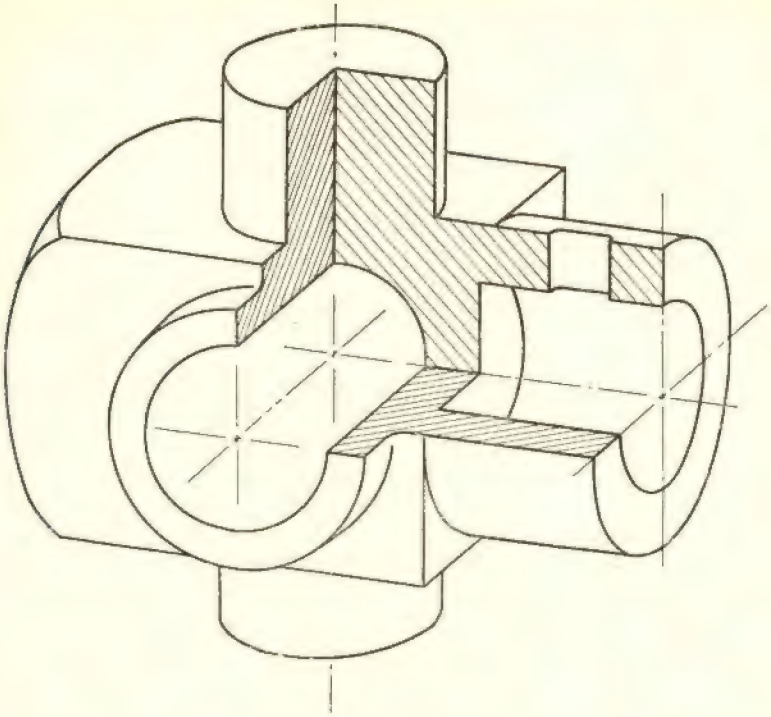


Fig. 28 — Cruzeta com 3 cortes parciais.

As secções resultantes desenham-se por pontos, à maneira ordinária, determinando êstes pelas suas coordenadas no plano de corte. Escusado seria dizer que só em casos especiais haverá necessidade de empregar planos de corte que não sejam os planos principais da peça, ou planos paralelos a êstes.

Seja como fôr, basta aplicar as regras fundamentais e, melhor do que longas explicações, os exemplos figurados dão idea clara do aspecto de diferentes secções, limitadas por linhas rectas, quebradas, curvas ou mixtas (*fig. 28* e *29*).

Não há ainda normas generalizadas para figurar o tracejado das secções, o qual nos aparece de formas variadas e arbitrárias, consoante o gôsto ou a fantasia do desenhador. Vamos, por isso, tentar uma sistematização lógica do assunto, de resto resumida numa regra simples e sem pretensões.

É sabido que, na projecção ortogonal corrente, os cortes são tracejados a 45° sôbre as duas direcções principais (horizontal e vertical do plano do desenho); ocorre imediatamente fazer o transporte dessa norma para a projecção axonométrica e ver o que dêle resulta para os cortes feitos por planos paralelos a qualquer dos planos principais do modêlo.

Consideremos uma peça prismática qualquer e figuremos as secções produzidas por três planos de corte paralelos aos três planos principais da mesma, igualmente distanciados dum dos vértices (*fig. 30*). Em projecção ortogonal, os contornos das três secções serão quadrados iguais; em projecção axonométrica, serão paralelogramos cujos lados dependem dos parâmetros.

Na primeira, os tracejados terão a direcção duma das diagonais de qualquer dos quadrados; na segunda, terão, correspondentemente, as direcções das diagonais dos paralelogramos que limitam as secções. Se, além das direcções, transportarmos o afastamento das linhas de tracejado, êsse *passo* do tracejado, suposto constante nas várias vistas da

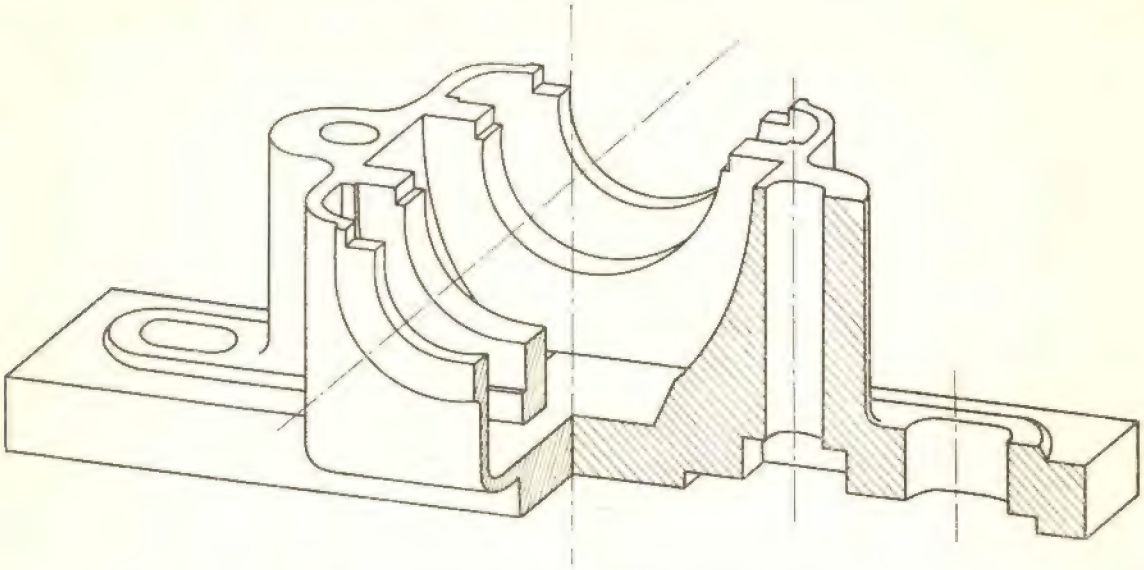


Fig. 29 — Base de chumaceira com 2 cortes parciais.

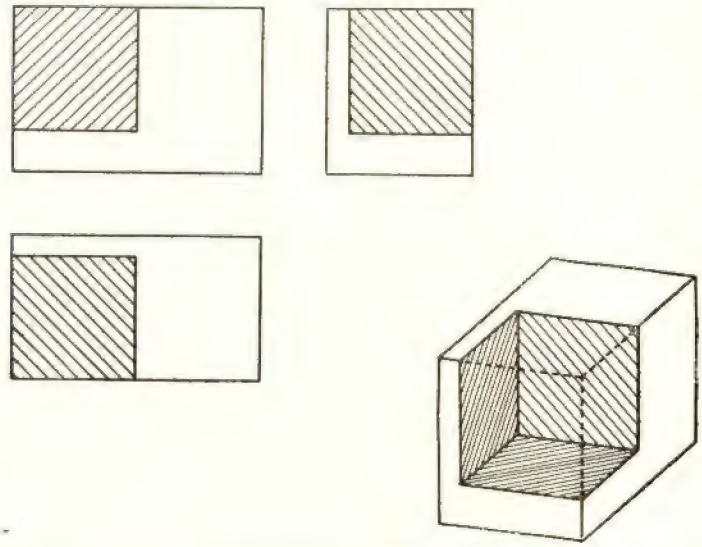


Fig. 30 — Direcções e afastamentos das linhas de tracejado consoante a posição dos planos de corte.

projecção ortogonal, será tanto menor (mais apertado o tracejado) na projecção axonométrica quanto mais de perfil ou de *cutelo* se apresentar a secção, o que é perfeitamente lógico e auxilia a interpretação perspectiva.

Gràficamente, uma vez arbitrado um dos passos, os outros dois são obtidos fazendo convergir as linhas de tracejado sôbre os mesmos pontos da aresta comum a duas secções, aresta cujo aparecimento é justamente provocado pelos planos de corte.

Definido assim, em direcção e em passo, o tracejado nos três planos principais, é fácil de ver que a aplicação da regra à projecção axonométrica 1 : 1 : 1/2 conduz a um tracejado cêrca de duas vezes mais apertado nas secções que se apresentam em profundidade, em relação àquelas que se apresentam de frente.

Poderíamos empregar tambem, com a mesma lógica, as direcções de tracejado correspondentes às outras diagonais dos paralelogramos, que não as figuradas, mas a prática aconselha a evitar essa variante nas projecções axonométricas mais usuais, pois que uma das direcções de tracejado aproximar-se-ia duma das direcções axonométricas e as outras duas situar-se-iam aproximadamente no prolongamento uma da outra, o que pode dar lugar a confusões.

Quando estas direcções de tracejado se não possam dispensar, como no caso de várias peças distintas em contigüidade e abrangidas pelos mesmos planos de córte, deve estudar-se a distribuição dos tracejados por forma a evitar o mais possível os inconvenientes citados, podendo ainda desencontrar-se as linhas de tracejado e variar-se convenientemente o passo nas secções de peças diferentes.

A regra dada pode reduzir-se a um enunciado simples, dizendo que *«as linhas de tracejado na projecção axonométrica são as intersecções de planos paralelos e equidistantes, inclinados a 45° sôbre todos os planos principais do modêlo, com as secções obtidas pelos planos de córte paralelos aos mesmos planos principais»*.

A aplicação desta norma a todos os casos correntes de cortes parciais ou totais conduz a resultados satisfatórios, como se mostra nos exemplos figurados.

Cotagem

Também não há princípios rígidos para a cotagem da representação axonométrica: a inteligência e o bom senso de quem desenha suprirão as dificuldades e eliminarão as ambigüidades que se podem apresentar, de maneira a tornar clara e fácil a leitura do desenho.

A única regra geral a acentuar, de resto evidente, é a de que as linhas de cota paralelas a uma direcção principal (e esta sua orientação corresponde à quási totalidade dos casos correntes) serão limitadas por linhas de chamada ou de dimensão paralelas a outra direcção principal.

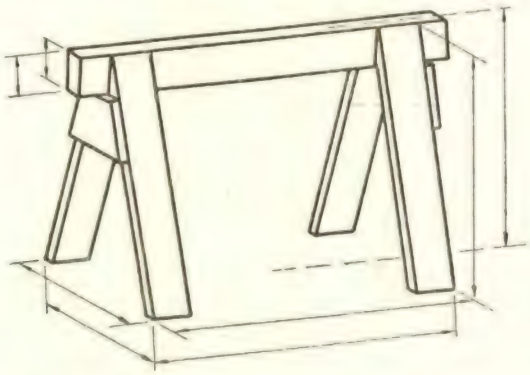


Fig. 31 — Cotagem das mesmas dimensões com diferentes linhas de extensão.

Para uma certa linha de cota (que define a direcção única e determinada em que se faz a medição da dimensão) há, portanto, duas direcções possíveis das respectivas linhas de chamada (*fig. 31*). Devemos preferir a solução que se torne mais clara ou dê melhor aspecto ao desenho.

De resto, a regra geral enunciada admite excepções, uma das quais importante: os diâmetros e raios dos círculos ou dos arcos de círculo podem, à semelhança do que acontece na projecção ortogonal usual, ser cotados em qualquer direcção do plano axonométrico, *quando indicados interiormente*. Porém, se são transportados para o exterior da elipse correspondente, tanto a linha de cota como as linhas de chamada que a limitam, deverão ter as orientações já assinaladas.

Para ilustrar estas regras, damos um exemplo (*fig. 32*) em que indicamos por *C* várias maneiras correctas e por *I* algumas formas incorrectas de indicar as cotas ou as respectivas linhas de dimensão na cotagem de diâmetros.

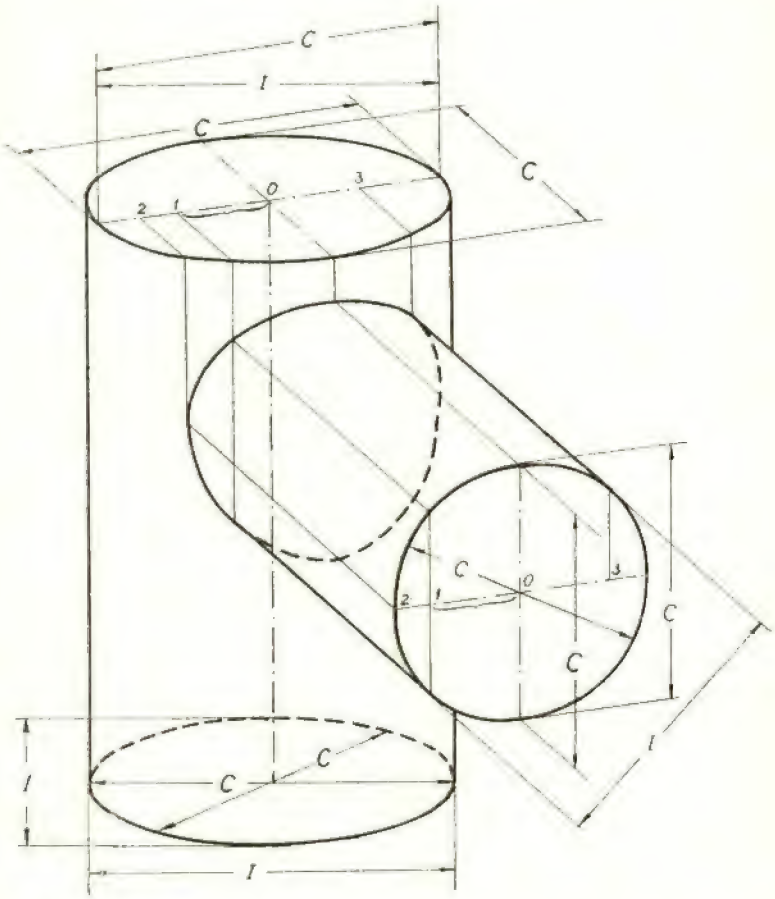


Fig. 32 — Cotagem de diâmetros (estudo da intersecção de 2 cilindros).
C — correcto; *I* — incorrecto.

Como é freqüente aparecerem estas incorrecções, concretizaremos ainda uma vez: quando o diâmetro ou raio dum círculo são indicados exteriormente, no seu plano ou fora dêle, as linhas de cota e de chamada definirão a dimensão dum dos eixos (ou semi-eixos) conjugados da elipse correspondente e não dos eixos (ou semi-eixos) de simetria desta.

***

Há quem opine que a projecção axonométrica, representação tri-dimensional ou perspectiva paralela será o desenho técnico do futuro.

Desejaríamos acreditá-lo, mas só com a condição de aparecerem instrumentos novos que permitam a sua execução fácil e expedita, mais do que é hoje.

Consideramos que a projecção ortogonal multiplanar é mais elástica e verdadeira na construção de peças difíceis ou complexas (motores, turbinas, estruturas metálicas, etc.), no estudo das concordâncias e arredondamentos de linhas e de superfícies, bem como na tradução gráfica dos cálculos das secções resistentes ou da sua determinação por sentimento ou pela prática.

A representação axonométrica tem o seu mérito; podemos defini-lo considerando-a como um desenho *de compreensão e de aspecto*, lado a lado com a vulgar projecção ortogonal que é mais *de descrição e de construção*.

Seja como fôr, é um bom auxiliar da imaginação, constituindo um excelente exercício para o técnico e um agradável modo de falar para o menos versado na matéria ou para o executor de menos *engenho*.

Tornar mais conhecido entre nós êste processo gráfico de representação, chamar a atenção para a vantagem de sistematizar a sua doutrina, de simplificar a sua nomenclatura, de estabelecer as suas normas, foi a contribuïção que se pretendeu dar ao assunto com o presente ensaio.

Lisboa, Fevereiro de 1945

ADITAMENTO

Nas nossas salas de desenho técnico, o maior óbice ao emprêgo da projecção axonométrica parece residir no traçado das elipses. Há um pouco de razão neste temor, mas não devem exagerar-se as dificuldades, as quais se atenuam muito se o trabalho fôr organizado convenientemente, como se faz nas boas salas de desenho do estranjeiro.

Em primeiro lugar, o traçado rigoroso, por pontos, é muito facilitado com o emprêgo de cérceas de curvas elípticas («pistolets») e o traçado contínuo pode obter-se com o elipsógrafo.

Melhor ainda, por ser mais expedito, é o traçado aproximado por curvas circulares concordantes (ovais), empregando o compasso vulgar. Como primeira aproximação, satisfatória na quási totalidade dos casos, qualquer elipse, uma vez determinados os eixos principais, pode ser substituída por uma oval de 4 centros (duplo arco abatido), como ensinam os tratados de desenho geométrico elementar. Como segunda aproximação, empregaremos a oval de 6 centros, que se confunde pràticamente com a elipse.

Ora numa sala de desenho emprega-se quási sempre o mesmo tipo de projecção axonométrica. É muito fácil, portanto, estabelecer uma tabela que dê os raios dos arcos de círculo que formam a oval em função dos diâmetros conjugados da elipse, que são os elementos primários a marcar no desenho. Entre nós, já existem esquadros para projecção dimétrica munidos duma dessas pequenas tabelas, a qual é de uso geral e cuja utilização reduz consideràvelmente o tempo de execução.

Lisboa, Março de 1945

BIBLIOGRAFIA

José Pereira — Desenho de projecções.
Thomas E. French — Engineering Drawing.
C. Volk — Die maschinentechnischen Bauformen und das skizzieren in Perspektive.
Armando Cardoso — Projecções ortogonais.
Freench & Svensen — Mechanical Drawing.
Haeder — Schnellperspektive.
G. S. Gouch — Three dimensional Drawings: a trimetric projection (Engineering, 1937, pag. 458).

A prospecção eléctrica do sub-solo pelo método da resistividade aparente

PELO ENG.º DE MINAS (I. S. T.) VASCO MENDES DE SOUSA

1 — Introdução

O presente artigo pretende divulgar um dos métodos mais simples de prospecção geofísica e chamar a atenção dos Engenheiros Civis e de Minas para êste novo meio de investigação geológica. Com efeito êste método poderá resolver econòmicamente muitos problemas referentes à prospecção de jazigos minerais e ao estudo estrutural dos terrenos desempenhando um papel de primacial importância na pesquisa das formações aquíferas.

Com o incremento que estão tomando entre nós os estudos hidrogeológicos devido à elaboração dos projectos de abastecimento de águas a povoações é natural que se generalize o emprêgo dêste método de prospecção tanto mais que a aparelhagem necessária é relativamente simples e económica. Como veremos adiante podemos calcular a resistividade aparente do sub-solo, a partir da medição da resistência aparente do mesmo com ohmimetros adequados construídos como o propósito de verificar as terras das centrais eléctricas e das tôrres das linhas de transmissão de energia.

Por outro lado êste método de prospecção pode também prestar relevantes serviços nos estudos geológicos estruturais necessários à elaboração dos grandes projectos de obras públicas (barragens, pontes, etc.).

A interpretação dos resultados obtidos embora apresente algumas dificuldades conduz no geral a resultados concludentes desde que seja feita por indivíduos com conhecimentos geológicos.

Como a bibliografia sôbre o assunto é restrita e difícil de obter e a maioria dos métodos e aparelhos estão cobertos por patentes, em geral estrangeiras, estabeleceu-se à volta dos métodos e dos aparelhos de prospecção geofísica uma atmosfera de segrêdo que infelizmente tem obstado à generalização e difusão dos mesmos no nosso País. Desta forma resolvemos escrever o presente artigo em que resumimos apontamentos nossos coligidos na Bibliografia citada no final.

2 — Campo de aplicação

Na aplicação dos métodos de prospecção geofísica a qualquer problema geológico como por exemplo: prospecção de jazigos minerais, captações de águas, projectos de obras públicas (pontes, barragens, portos, etc.), convém ter em vista o seguinte:

1.º — A prospecção geofísica deve aplicar-se em seguida ao estudo geológico e antes de quaisquer outros trabalhos de pesquisa, em especial antes das sondagens.

Qualquer dêstes processos confirma e completa os resultados obtidos pelos anteriores e o seu custo cresce ràpidamente desde a prospecção geológica às sondagens.

Segundo Rothé (7), a prospecção geofísica permite estudar as regiões inacessíveis ao martelo do geólogo e os seus resultados servirão para orientar os subseqüentes trabalhos de pesquisa.

2.º — Os métodos de prospecção geofísica não conduzem a resultados directos, isto é, não nos afirmam a existência ou inexistência de água ou de minérios em determinado ponto, nem tão pouco a presença de acidentes tectónicos. Apenas nos ensinam a medir determinadas grandezas físicas, à superfície do terreno e a interpretar geològicamente os resultados obtidos.

Compreende portanto uma parte do domínio da Física — medição de grandezas — e outra do domínio da Geologia — interpretação. É precisamente para fazer a interpretação que se torna necessário o conhecimento geológico da região.

A escolha do método de prospecção geofísica a adoptar depende não só da estrutura geológica do sub-solo como também da profundidade a que o queremos investigar e do rigor exigido.

O método da resistividade aparente quanto à sua aplicabilidade apresenta as seguintes características:

1.ª — É aplicável em todos os casos em que as diferentes formações geológicas apresentam diferenças de condutibilidade.

Contudo como observa Heiland (6) as indicações obtidas à superfície não crescem proporcionalmente à diferença das condutibilidades das diversas formações tendendo para um valor assintótico como veremos adiante. Produz-se assim como que uma saturação donde resulta que duas formações com condutibilidades muito afastadas possam pelas suas indicações superficiais confundir-se com formações com condutibilidades próximas

2.ª — O método da resistividade aparente permite estudar o sub-solo até à profundidade aproximada de 500 m. É possível controlar a profundidade a que queremos estudar o sub-solo, como veremos adiante.

3.ª — Em muitos casos é possível fazer-se a interpretação quantitativa, isto é localizar com relativa aproximação em profundidade jazigos minerais, formações aquíferas ou acidentes tectónicos.

4.ª — O método da resistividade aparente é particularmente indicado para a determinação da profundidade do bedrock de formações detríticas (para a exploração de jazigos aluvionários, fundações de barragens, pilares para pontes, construção de túneis, portos, etc.) e para a pesquisa e localização de determinadas formações aquíferas.

3 — Teoria do método

Suponhamos um circuito eléctrico alimentado por um gerador de corrente contínua fechado através do sub-solo. O circuito é pois formado por uma parte exterior constituída por condutores lineares de elevada condutibilidade e por uma parte interior constituída pelo sub-solo, formando um condutor a três dimensões de forma arbitrária, em geral heterogéneo e de fraca condutibilidade.

A ligação entre os dois circuitos faz-se através de terras especiais que designaremos por electrodos.

Suponhamos o circuito interior homogéneo de forma a definir uma resistência aparente — resistência do circuito interior heterogéneo suposto homogéneo.

A resistência aparente, assim definida constitue uma grandeza física variável com a composição e heterogeneidade do sub-solo e com a posição dos electrodos.

A partir dela poderemos definir a resistividade aparente — resistividade do sub-solo heterogéneo suposto homogéneo. Esta dependerá ainda da composição e heterogeneidade do sub-solo e da posição dos electrodos. Se o sub-solo fôr homogéneo a resistividade é independente da posição dos electrodos e desta forma poderemos avaliar o grau de heterogeneidade do sub-solo pelo exame das curvas que traduzem a variação da resistividade aparente em função da posição dos electrodos.

Interessa-nos pois medir a resistência aparente de sub-solo, calcular em seguida a sua resistividade aparente e interpretar geològicamente os resultados obtidos.

A determinação da resistência aparente do sub-solo é um problema de determinação da resistência de um corpo de forma arbitrária.

Para esta determinação são necessários dois circuitos exteriores independentes um dos quais fornece a corrente eléctrica — circuito principal — e outro — circuito secundário ou potencial — serve para medir a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer do corpo condutor.

Estes dois circuitos estão ligados ao corpo por quatro contactos e a partir da medição da intensidade da corrente no circuito principal e da diferença de potencial nos extremos do circuito secundário podemos de-

terminar a resistência do circuito interior. Suponhamos portanto o circuito principal ligado à terra pelos electrodos A e B e o circuito secundário ou potencial ligado à terra pelos electrodos P e R.

Seja I a intensidade da corrente que percorre o circuito principal e V a diferença de potencial entre os electrodos P e R, extremos do circuito secundário.

Demonstra-se que a resistividade ρ do sub-solo homogéneo é dada por

$$\rho = 2\pi \frac{V}{I} \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

Em que r_1 e r_2 são as distâncias de P a A e B e R_1 e R_2 as distâncias de R a A e B.

Se os electrodos A, B, P e R estiverem à superfície do solo as distâncias r_1, r_2, R_1 e R_2 medem-se em planta.

Em geral colocam-se os quatro electrodos em linha recta a uma distância $r_1 = R_2 = a$ e $r_2 = R_1 = 2a$ (dispositivo de Wenner-Gish-Rooney) e neste caso a fórmula anterior reduz-se a:

$$\rho = 2\pi a \frac{V}{I}$$

Esta fórmula é idêntica à que nos dá a resistividade de uma semi-esfera de raio r o que justifica a seguinte regra:

A profundidade a que investigamos o sub-solo é igual à distância a que separa os electrodos.

4 — Técnica do método da resistividade aparente

No geral emprega-se o dispositivo de Wenner-Gish-Ronney constituído por quatro electrodos colocados em linha a distâncias iguais uns dos outros.

A resistividade aparente ρ_s determina-se pela fórmula:

$$\rho_s = 2\pi a \frac{V}{I} = 2\pi a \quad R$$

em que

a — distância entre os electrodos
V — diferença de potencial entres os electrodos secundários ou potenciais
I — intensidade da corrente no circuito primário
R — resistência aparente do terreno, obtida directamente no caso de empregarmos um ohmímetro.

Supõe-se o valor da resistividade ρ_s referido a uma estação de medida coincidente com o ponto central do dispositivo de Wenner-Gish-Rooney e à profundidade a igual à distância entre os electrodos.

Pode aplicar-se o método segundo duas técnicas distintas.

1.º — Perfil das resistividades a profundidade constante.

2.º — Sondagens eléctricas.

No perfil das resistividades a profundidade constante deslocamos o dispositivo segundo uma determinada direcção mantendo as distâncias recíprocas entre os electrodos.

Desta forma fazemos o estudo a profundidade contante e referimos os valores ρ_s medidos a estações e coincidentes com o ponto central do dispositivo.

Em seguida traçamos diagramas em que marcamos em abcissas as estações e e em ordenadas os valores ρ_s medidos — diagramas de resistividade a profundidade constante $\rho_s = f(e)$ que são apenas susceptiveis de interpretação qualitativa, como veremos.

Se fizermos as medições ao longo de várias direcções paralelas poderemos numa planta marcar uma série de pontos cotados correspondentes às estações em que as cotas representam os valores de ρ_s. Poderemos dêste modo traçar as linhas de equi-resistividade que dependerão, em geral, da direcção em que se efectuaram as medições.

Na aplicação do método pelo sistema das sondagens eléctricas a estação permanece constante variando a distância a.

Traçamos assim diagramas $\rho_s = f(a)$ em que marcamos em abcissas os valores de ρ_s e em ordenadas os valores de a. Estes são não só susceptíveis de interpretação quali-